Devoir en temps libre n° 15

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Interpolation - Approximation d'une intégrale

PARTIE I : Etude algébrique

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit φ l'application de E vers $\mathbb{R}^4$ définie par : $\forall P \in E, \varphi(P) = \begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ P(b) \\ P'(b) \end{pmatrix}$ en identifiant polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Montrer que φ est un isomorphisme
2. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $P_4 = \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. Soient $P_1 = I - P_3$ et $P_2 = -P_4(a+b-X)$ avec I le polynôme constant égal à 1. Montrer que : $P_1 = \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $P_2 = \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
4. Vérifier que $\displaystyle\int_a^b P_3(t)\,dt = \frac{b-a}{2}$ et $\displaystyle\int_a^b P_4(t)\,dt = -\frac{(b-a)^2}{12}$. Calculer $\displaystyle\int_a^b P_1(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b P_2(t)\,dt$
5. Montrer que, si $Q \in E$, on a : $Q = Q(a)P_1 + Q'(a)P_2 + Q(b)P_3 + Q'(b)P_4$.
   En déduire que : $\forall P \in E$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left(P(a)+P(b)\right) + \frac{(b-a)^2}{12}\left(P'(a)-P'(b)\right)$

PARTIE II - Approximation d'une intégrale - Majoration de l'erreur de méthode

Soit $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$.Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On associe à f le polynôme de E tel que : $P_f(a) = f(a)$, $P_f'(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$, $P_f'(b) = f'(b)$

1. Si $u \in \mathbb{R}$, on pose $\Psi(u) = \displaystyle\int_a^u f(t)\,dt - \frac{u-a}{2}\left(f(a)+f(u)\right) - \frac{(u-a)^2}{12}\left(f'(a)-f'(u)\right)$
   Montrer que Ψ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\Psi(a)$, $\Psi'(a)$, $\Psi''(a)$ et vérifier que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\Psi^3(u) = \dfrac{(u-a)^2}{12} f^{(4)}(u)$
2. On pose $M = \sup\limits_{u\in[a,b]} \left|f^{(4)}(u)\right|$. Montrer que : $\forall x \in [a,b]$:
   $\left|\Psi^{(2)}(x)\right| \leqslant \dfrac{M(x-a)^3}{36}$, $\left|\Psi'(x)\right| \leqslant \dfrac{M(x-a)^4}{144}$, $\left|\Psi(x)\right| \leqslant \dfrac{M(x-a)^5}{720}$

3. Montrer que : $\exists R \in \mathbb{R} \Big| \int_a^b f(t)\, dt = \dfrac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \dfrac{(b-a)^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right) + R$ avec $\left|R\right| \leqslant \dfrac{Mb-a)^5}{720}$.

   Comparer R et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \left(f(t) - P_f(t)\right)\, dt$

PARTIE III : Application numérique

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit g la primitive de f s'annulant en 0. On se propose de calculer $g(1)$ avec au moins trois décimales exactes. Pour tout couple (a,b) avec $a<b$, on pose : $\lambda_{a,b} = \dfrac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \dfrac{(b-a)^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right) = \displaystyle\int_a^b P_f(t)\, dt$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)\, f(x)$ puis calculer :
   $M = \sup\limits_{u\in[0,1]} \left|f^{(4)}(u)\right|$, $M_1 = \sup\limits_{u\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|f^{(4)}(u)\right|$ et $M_2 = \sup\limits_{u\in\left[\frac{1}{2},1\right]} \left|f^{(4)}(u)\right|$
2. Donner une valeur approchée de $\lambda_{0,1}$.
   En utilisant les résultats de la partie II, en déduire un encadrement de $g(1)$. La méthode ainsi employée permet-elle d'obtenir avec certitude les trois premières décimales de $g(1)$?
3. Donner une valeur approchée de $\lambda_{0,\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\frac{1}{2},1}$. En déduire un nouvel encadrement pour $g(1)$.

N.B. On écrira sur la copie les six décimales données par la calculatrice pour les valeurs approchées de M, M_1, M_2, $\lambda_{0,1}$, $\lambda_{0,\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\frac{1}{2},1}$

CORRECTION : Approximation d'une intégrale – Interpolation –)

PARTIE I : Etude algébrique

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Soient a et b deux réels tels que a<b.
Soit φ l'application de E vers $\mathbb{R}^4$ définie par : $\forall P \in E$, $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ en identifiant polynôme et fonction polynomiale associée.

1) Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^4$.

On a : **E de dimension 4**, une base étant (I, X, X^2, X^3).

L'application φ est linéaire car la dérivation l'est.

Soit $P\in E$. $P\in \ker(\varphi) \Leftrightarrow$ a et b sont des zéros d'ordre au moins 2 de P $\Leftrightarrow P = 0$ car P est de degré inférieur ou égal à 3.
Ainsi $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ et **donc φ est injective**.
Or φ est une application linéaire injective de E qui est de dimension 4 vers $\mathbb{R}^4$ qui est aussi de dimension 4, donc **φ est un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^4$**

2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}((0,0,1,0))$ et $P_4 = \varphi^{-1}((0,0,0,1))$

Un "simple" calcul montre que l'on a : $\mathbf{P_3 = \dfrac{(X-a)^2}{(a-b)^3}(2X + a - 3b)}$ **et** $\mathbf{P_4 = (X-b)\dfrac{(X-a)^2}{(b-a)^2}}$

3) Soient $P_1 = I - P_3$ et $P_2 = -P_4(a+b-X)$ (où I est le polynôme constant égal à 1). Montrer que : $P_1 = \varphi^{-1}((1,0,0,0))$ et $P_2 = \varphi^{-1}((0,1,0,0))$

$\varphi(P_1) = \varphi(I) - \varphi(P_3) = (1,0,1,0) - (0,0,1,0) = (1,0,0,0)$ donc, par bijectivité, $\mathbf{P_1 = \varphi^{-1}((1,0,0,0))}$
Par composition, $P_2'(X) = P_4'(a + b - X)$ d'où : $P_2(a) = -P_4(b) = 0$, $P_2'(a) = P_4'(b) = 1$, $P_2(b) = -P_4(a) = 0$, $P_2'(b) = P_4'(a) = 0$
Donc $\varphi(P_2) = (0,1,0,0)$ donc, par bijectivité, $\mathbf{P_2 = \varphi^{-1}((0,1,0,0))}$

4) Vérifier que : $\displaystyle\int_a^b P_3(t)\,dt = \frac{b-a}{2}$ et $\displaystyle\int_a^b P_4(t)\,dt = -\frac{(b-a)^2}{12}$ Calculer $\displaystyle\int_a^b P_1(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b P_2(t)\,dt$.

On vérifie en effectuant par exemple des intégrations par parties que : $\displaystyle\mathbf{\int_a^b P_3(t)\,dt = \frac{b-a}{2}}$ **et** $\displaystyle\mathbf{\int_a^b P_4(t)\,dt = -\frac{(b-a)^2}{12}}$

$\displaystyle\int_a^b P_1(t)\,dt = (b-a) - \int_a^b P_3(t)\,dt = \frac{b-a}{2}$ D'où $\displaystyle\mathbf{\int_a^b P_1(t)\,dt = \frac{b-a}{2}}$

$\displaystyle\int_a^b P_2(t)\,dt = -\int_a^b P_4(a+b-t)\,dt = \int_b^a P_4(u)\,du$ en posant $u = a + b - t$. D'où $\displaystyle\mathbf{\int_a^b P_2(t)\,dt = \frac{(b-a)^2}{12}}$

5) Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de E et, si $P \in E$, montrer que les coordonnées de P dans cette base sont P(a) , P'(a) , P(b) , P'(b) .
En déduire que : $\forall P\in E$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(P(a) + P(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(P'(a) - P'(b))$

φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ vers E. Or (P_1, P_2, P_3, P_4) est l'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Ainsi (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de E
Soit $P\in E$. Il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$
On a alors : $\varphi(P) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2) + \lambda_3 \varphi(P_3) + \lambda_4 \varphi(P_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Or $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ donc en identifiant, **on trouve bien : $\mathbf{P = P(a) P_1 + P'(a) P_2 + P(b) P_3 + P'(b) P_4}$**

On intègre alors P sur [a,b]. On a : $\displaystyle\int_a^b P(t)\,dt = P(a)\int_a^b P_1(t)\,dt + P'(a)\int_a^b P_2(t)\,dt + P(b)\int_a^b P_3(t)\,dt + P'(b)\int_a^b P_4(t)\,dt$

D'où, compte tenu des calculs précédents : $\displaystyle\mathbf{\forall P\in E,\ \int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(P(a) + P(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(P'(a) - P'(b))}$

PARTIE II : Approximation d'une intégrale – Majoration de l'erreur de méthode

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe C^4. Soient a et b deux réels tels que a<b.
On associe à f le polynôme P_f de E tel que : $P_f(a) = f(a)$, $P'_f(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P'_f(b) = f'(b)$

1) Si $u\in\mathbb{R}$, on pose : $\displaystyle\Psi(u) = \int_a^u f(t)\,dt - \frac{u-a}{2}(f(a) + f(u)) - \frac{(u-a)^2}{12}(f'(a) - f'(u))$. Montrer que Ψ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Calculer Ψ(a) , Ψ'(a), Ψ''(a) et vérifier que : $\forall u\in\mathbb{R}$, $\Psi^{(3)}(u) = \dfrac{(u-a)^2}{12} f^{(4)}(u)$

Ψ est la somme de fonction de classe $\mathcal{C}^3$ donc est de classe $\mathcal{C}^3$.

Un calcul simple donne : $\mathbf{\Psi(a) = 0}$ **,** $\mathbf{\Psi'(a) = 0}$ **,** $\mathbf{\Psi''(a) = 0}$ **et** $\mathbf{\forall u\in\mathbb{R},\ \Psi^{(3)}(u) = \dfrac{(u-a)^2}{12} f^{(4)}(u)}$

2) On pose : $M = \sup\limits_{u\in[a,b]} |f^{(4)}(u)|$. Montrer que : $\forall x \in [a,b]$: $|\Psi^{(2)}(x)| \le \dfrac{M(x-a)^3}{36}$; $|\Psi'(x)| \le \dfrac{M(x-a)^4}{144}$; $|\Psi(x)| \le \dfrac{M(x-a)^5}{720}$

$\forall x \in [a,b]$, $|\Psi^{(2)}(x)| = |\Psi^{(2)}(x) - \Psi^{(2)}(a)| = \left|\displaystyle\int_a^x \Psi^{(3)}(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^2}{12} M\,dt = \mathbf{\frac{M(x-a)^3}{36}}$

Avec les mêmes types de majorations, on montre : $\forall x \in [a,b]$, $\left| \Psi'(x) \right| \le \frac{M\,(x-a)^4}{144}$ et $\left| \Psi(x) \right| \le \frac{M\,(x-a)^5}{720}$

3) Montrer que : $\exists R \in \mathbb{R} \mid \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b)) + R$ avec $\left| R \right| \le \frac{M\,(b-a)^5}{720}$

On a : $\Psi(b) = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))$

Donc : $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b)) + \Psi(b)$ avec $\left| \Psi(b) \right| \le \frac{M\,(b-a)^5}{720}$.

4) Comparer R et l'intégrale $\int_a^b \left(f - P_f\right)(t)\,dt$

Le calcul de $\int_a^b P_f(t)\,dt$ donne, en utilisant le I5 : $\int_a^b P_f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))$

Ainsi $\int_a^b P_f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \Psi(b)$ **et donc** $R = \Psi(b) = \int_a^b \left(f - P_f\right)(t)\,dt$

PARTIE III : Application numérique

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soit g la primitive de f s'annulant en 0. On se propose de calculer g(1) avec au moins trois décimales exactes.

Pour tout couple (a,b) tel que a < b, on pose : $\lambda_{a,b} = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b)) = \int_a^b P_f(t)\,dt$

1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)\, f(x)$ puis calculer : $M = \sup_{u \in [0,1]} \left| f^{(4)}(u) \right|$, $M_1 = \sup_{u \in [0,\frac{1}{2}]} \left| f^{(4)}(u) \right|$ et $M_2 = \sup_{u \in [\frac{1}{2},1]} \left| f^{(4)}(u) \right|$

De simples calculs de dérivation fournissent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) = -x\, f(x)$, $f^{(2)}(x) = (x^2 - 1)\, f(x)$, $f^{(3)}(x) = -x\,(x^2 - 3)\, f(x)$ $f^{(4)}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)\, f(x)$ et $f^{(5)}(x) = -x\,(x^4 - 10x^2 + 15)\, f(x)$

Sur [0,1], $f^{(5)}$ est négatif donc $f^{(4)}$ est décroissante. Or $f^{(4)}(0) = 1.196827$ à 10^{-6} près, $f^{(4)}(½) = 0.550102$ à 10^{-6} près et $f^{(4)}(1) = -0.483941$ à 10^{-4} près, donc : $M = \left| f^{(4)}(0) \right| = 1.196827$ **à** 10^{-4} **près** $= M_1$ **et** $M_2 = \left| f^{(4)}(½) \right| = 0.550102$ **à** 10^{-4} **près**

2) Donner une valeur approchée de $\lambda_{0,1}$. En utilisant les résultats de la partie II, en déduire un encadrement de g(1).
La méthode ainsi employée permet-elle d'obtenir avec certitude les trois premières décimales de g(1)?

$\lambda_{0,1} = 0.340620$ à 10^{-6} près

D'après la partie II, on sait que : $\left| g(1) - \lambda_{0,1} \right| \leqslant \frac{M}{720} = 0.001662$ à 10^{-6} près par excès.

Donc on obtient : $0.338958 \leqslant g(1) \leqslant 0.342282$: on ne peut connaitre g(1) qu'à 2.10^{-3} près

3) Donner une valeur approchée de $\lambda_{0\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\frac{1}{2}1}$. En déduire un nouvel encadrement pour g(1).

$\lambda_{0,\,½} = 0.191419$ à 10^{-6} près et $\lambda_{½,\,1} = 0.149882$ à 10^{-6} près

D'après la partie II, on sait que : $\left| g(½) - \lambda_{0,\,½} \right| \leqslant \frac{M_1}{720 * 2^5} = 0.000052$ à 10^{-6} près par excès

De même : $\left| g(1) - g(½) - \lambda_{½,\,1} \right| \leqslant \frac{M_2}{720 * 2^5} = 0.000024$ à 10^{-6} près par excès

Donc on obtient : $0.3412259 \leqslant g(1) \leqslant 0.341378$: **Donc g(1) = 0.3413 à** 10^{-4} **près**