Devoir surveillé n° 9 (4 heures)

Ce devoir est constitué de trois exercices et d'un problème. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

EXERCICE I : Calculs d'intégrales

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos(x)+\sin(x)+3}$ en effectuant le changement de variables $t=\tan\frac{x}{2}$
2. Soit $I=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.
   (a) Que vaut I lorsque l'on effectue le changement de variables $u=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$?
   (b) A l'aide d'un nouveau changement de variables, calculer I.
3. Déterminer la convergence et l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{2n-k}{2n+k}}$

EXERCICE II : Endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

1. (a) Déterminer $(A,B,C)\in(\mathbb{R}_2[X])^3$ vérifiant : $\begin{cases}A(-3)=1\\A(1)=0\\A(2)=0\end{cases}$, $\begin{cases}B(-3)=0\\B(1)=1\\B(2)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}C(-3)=0\\C(1)=0\\C(2)=1\end{cases}$
   (b) Vérifier que la famille (A,B,C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On définit l'application u sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P\in\mathbb{R}[X]\quad,\quad u(P)=P(-3)A+P(1)B+P(2)C$
   (a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Calculer $u(A)$, $u(B)$ et $u(C)$. En déduire que u est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$
   (d) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $u(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par (X^3-7X+6)

EXERCICE III : Itéré d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ par : $\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3a\\-16a+b+4c-4d\\10a+c\\10a-2c+3d\end{pmatrix}$

1. Exprimer f^2.
2. On pose $p=\frac{1}{2}\left(f-Id_{\mathbb{R}^4}\right)$. Montrer que p est un projecteur. Déterminer son axe et sa direction.
3. En déduire une relation linéaire entre f^2, f et $Id_{\mathbb{R}^4}$
4. f est-il un automorphisme et, le cas échéant, déterminer f^{-1}
5. Soit $g=f-3Id_{\mathbb{R}^4}$. Montrer que $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$. En déterminer des bases.
6. Trouver un réel α non nul tel que αg soit un projecteur. On appelle q ce projecteur.
7. Ecrire f comme combinaison linéaire de p et de q.
8. Soit $n\in\mathbb{N}$. Ecrire f^n comme combinaison linéaire de p et de q puis en fonction de f et $Id_{\mathbb{R}^4}$.

PROBLEME I : Endomorphisme nilpotent d'ordre n

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, pour $k \in \mathbb{N}$, on définit f^k par récurrence : $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$. On s'intéresse aux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f^{n-1} \neq 0 \quad \text{et } f^n = 0 \tag{1}$$

1. Etude d'un exemple.
   On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a+4b+2c \\ -4a-2b+c \\ 2a-2c \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On donnera une base de chacun des ces espaces et, si parmi ces espaces, il y a un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, on donnera également une équation de l'hyperplan

   (b) Exprimer les endomorphismes f^2 et f^3. Que peut-on en conclure ?

   (c) Déterminer $\ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$. On donnera une base de chacun des ces espaces et, si parmi ces espaces, il y a un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, on donnera également une équation de l'hyperplan

   (d) Comparer les espaces trouvés en 1a et 1c

   Retour au cas général

   On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation (1)

2. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. On fixe un tel x_0.
   Montrer que la famille $\left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^1(x_0)\ ,x_0\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

3. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note F_k le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par : $\left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-k}(x_0)\right)$.

   (a) Déterminer la dimension de F_k ?

   (b) Montrer que : $F_k = \mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right) = \ker\left(f^k\right)$.

   (c) Montrer que : F_k est stable par f, c'est-à-dire que $f(F_k) \subset F_k$

4. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f. On suppose que H est de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ Soit enfin g la restriction de f à H

   (a) Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $g^{p-1} \neq 0$ et $g^p = 0$.

   (b) Soit $x_1 \in H$ tel que $g^{p-1}(x_1) \neq 0$. Que peut-on dire de la famille $\left(x_1,\ g(x_1)\ ,\cdots,g^{p-1}(x_1)\right)$?
   En déduire que $g^k = 0$.

   (c) Montrer que $H = \ker\left(f^k\right)$.

   (d) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par f.

5. On veut trouver tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec f, c'est-à-dire tels que : $f \circ h = h \circ f$.

   (a) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ tels que : $h(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$.

   (b) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $\varphi = a_0 Id + a1f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$

      i. Montrer que, si f et h commutent, alors $\forall i \in \mathbb{N}, h\left(f^i(x_0)\right) = \varphi\left(f^i(x_0)\right)$

      ii. En déduire que $h = \varphi$

   (c) Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?

CORRECTION

EXERCICE I : Calculs d'intégrales

1. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

   On obtient : $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos(x)+\sin(x)+3} = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{5+t^2+2t} = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{(t+1)^2+4} = \frac{\pi}{4}$.

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos(x)+\sin(x)+3} = \frac{\pi}{4}}$.

2. (a) Dans $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, on pose $u = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. On a $dx = 4u\,du$ et donc : $\boxed{I = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 4\sqrt{1-u^2}du}$

   (b) On pose maintenant $u = \sin(t)$. On obtient

   $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2(t)dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt = \Big[\sin(2\,t) + 2\,t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$. D'où $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2} - 1}$

3. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{2n-k}{2n+k}} = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}\sqrt{\frac{p-k}{p+k}} = 2R_p$ avec $p = 2n$ et R_p somme de Riemann à droite associée à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Comme $(R_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et que l'on sait, d'après la question précédente, que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi}{2} - 1$, on en déduit que $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \textbf{ converge vers } \pi - 2}$

EXERCICE II : Endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

1. (a) Les polynômes $(A,B,C) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ vérifiant : $\begin{cases} A(-3) = 1 \\ A(1) = 0 \\ A(2) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} B(-3) = 0 \\ B(1) = 1 \\ B(2) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} C(-3) = 0 \\ C(1) = 0 \\ C(2) = 1 \end{cases}$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange :

   $\boxed{A = \frac{1}{20}(X-1)(X-2), \; B = -\frac{1}{4}(X-2)(X+3) \textbf{ et } C = \frac{1}{5}(X-1)(X+3)}$

   (b) ☞ Montrons que la famille (A,B,C) est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, a\,A + b\,B + c\,C = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, a\,A(x) + b\,B(x) + c\,C(x) = 0$. En appliquant cette relation en $-3, 1$ et 2, on trouve $a = b = c = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi la famille (A,B,C) est libre

   ☞ (A,B,C) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 donc c'en est une base.

   Ainsi $\boxed{(A,B,C) \textbf{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2. Soit $u : \mathbb{R}[X] \mapsto \mathbb{R}[X], P \to \quad u(P) = P(-3)A + P(1)B + P(2)C$.

   (a) Par linárité des formes linéaires $P \to P(-3)$, $P \to P(1)$ et $P \to P(2)$,

   $\boxed{u \textbf{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$

   (b) D'après les relations définissant A, B et C, on trouve $\boxed{u(A) = A, \; u(B) = B \textbf{ et } u(C) = C}$.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

   $u(u(P)) = P(-3)u(A) + P(1)u(B) + P(2)u(C) = P(-3)A + P(1)B + P(2)C = u(P)$. Ainsi $u^2 = u$. Donc u est un endomorphisme idempotent de $\mathbb{R}[X]$:

   $\boxed{u \textbf{ est un projecteur de } \mathbb{R}[X]}$

(c) ☞ Comme, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $u(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, on a $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Or A, B et C sont dans $\text{Im}(u)$ et engendrent $\mathbb{R}_2[X]$, donc on a la seconde inclusion et ainsi $\boxed{\text{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X]}$

☞ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $P \in \ker(u) \iff P(-3) = P(1) = P(2) = 0 \iff (X-1)(X-2)(X+3)\Big| P$.

Donc $\boxed{\ker(u) = (X-1)(X-2)(X+3)\mathbb{R}[X]}$.

Dans la suite on posera $D = (X-1)(X-2)(X+3) = X^3 - 7X + 6$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de P par $D = X^3 - 7X + 6$. Comme $R \in \mathbb{R}_2[X] = \text{vect}\,(A, B, C)$, il existe trois réels (a, b, c) tels que : $R = a\,A + b\,B + c\,C$. Ainsi $P = Q\,D + a\,A + b\,B + c\,C$.

En évaluant ce polynôme en -3, 1 et 2, on trouve $P(-3) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$ et donc $R = a\,A + b\,B + c\,C = P(-3)A + P(1)B + P(2)C = u(P)$.

Ainsi $\boxed{u(P) \textbf{ est le reste de la division euclidienne de } P \textbf{ par } (X^3 - 7X + 6) = D}$

EXERCICE III : Itéré d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

$$\forall\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ f\left(\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3a\\ -16a + b + 4c - 4d\\ 10a + c\\ 10a - 2c + 3d\end{pmatrix}$$

1. $\forall\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\boxed{f^2\left(\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9a\\ -64a + b + 16c - 16d\\ 40a + c\\ 40a - 8c + 9d\end{pmatrix}}$.

2. ☞ $\forall\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a $p\left(\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a\\ -8a + 2c - 2d\\ 5a\\ 5a - c + d\end{pmatrix}$ et $p^2\left(\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a\\ -8a + 2c - 2d\\ 5a\\ 5a - c + d\end{pmatrix}$.

   Ainsi par caractérisation des projecteurs, $\boxed{p \textbf{ est un projecteur}}$.

   ☞ L'axe du projecteur est : $F = \ker(p - Id_{\mathbb{R}^4})$. Or si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

   $$(a,b,c,d) \in F \iff \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ -8a + 2c - 2d\\ 5a\\ 5a - c + d\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -8a + 2c - 2d & = b\\ 5a & = c\\ 5a - c + d & = d\end{cases} \iff \begin{cases} b & = 2a - 2d\\ c & = 5a\end{cases}$$

   Ainsi l'axe du projecteur p est $\boxed{F = \ker(p - Id_{\mathbb{R}^4}) = \textbf{vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 5\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)}$

   ☞ La direction du projecteur est : $G = \ker(p)$. Or si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

   $$(a,b,c,d) \in G \iff \begin{pmatrix} a\\ -8a + 2c - 2d\\ 5a\\ 5a - c + d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = 0\\ -8a + 2c - 2d & = 0\\ 5a & = 0\\ 5a - c + d & = 0\end{cases} \iff \begin{cases} a & = 0\\ c & = d\end{cases}$$

   Ainsi la direction du projecteur p est $\boxed{G = \ker(p) = \textbf{vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)}$

   .

3. De $p^2 = p$, on tire : $\boxed{f^2 - 4\,f + 3\,Id_{\mathbb{R}^4} = 0}$

4. On a $f \circ \frac{1}{3}(4\,Id_{\mathbb{R}^4} - f) = \frac{1}{3}(4\,Id_{\mathbb{R}^4} - f) \circ f = Id_{\mathbb{R}^4}$

   Donc $\boxed{f \textbf{ est un automorphisme et } f^{-1} = \frac{1}{3}(4\,Id_{\mathbb{R}^4} - f)}$

5. ☞ $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -16a-2b+4c-4d \\ 10a-2c \\ 10a-2c \end{pmatrix}$ Soit $g = f - 3Id_{\mathbb{R}^4}$. En notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on sait que $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g)$. Or $g(e_1) = -5g(e_3) - 2g(e_2)$ et $g(e_4) = 2g(e_2)$ donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{vect}(g(e_2), g(e_3))$ et les vecteurs $g(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $g(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } \mathrm{Im}(g)}$.

☞ Par ailleurs, si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$(a,b,c,d) \in \ker(g) \iff \begin{pmatrix} -16a-2b+4c-4d \\ 10a-2c \\ 10a-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b &= 2a-2d \\ c &= 5a \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } \ker(g)}$

☞ Soit $X = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Si $X \in \mathrm{Im}(g) \cap \ker(g)$. Alors il existe $(\lambda, \delta) \in \mathbb{R}^2 \Big| X = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les coordonnées de X vérifient le système $\begin{cases} b &= 2a-2d \\ c &= 5a \end{cases}$. Ainsi $\lambda = \delta = 0_{\mathbb{R}}$ et donc $X = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ainsi $\mathrm{Im}(g) \cap \ker(g) \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Mais comme $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ sont des sev de $\mathbb{R}^4$, on en déduit l'égalité : $\boxed{\mathrm{Im}(g) \cap \ker(g) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$

☞ On a $\mathrm{Im}(g) \cap \ker(g) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et $\dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(g)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Donc par caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie, $\boxed{\mathrm{Im}(g) \oplus \ker(g) = \mathbb{R}^4}$

6. $g \circ g = f^2 - 6f + 9\, Id_{\mathbb{R}^4} = -2f + 6\, Id_{\mathbb{R}^4} = -2g$. Ainsi, $-\frac{1}{2}g$ est idempotent. Comme il s'agit d'un endomorphisme, par caractérisation des projecteurs, $\boxed{q = -\frac{1}{2}g = \frac{3}{2}Id_{\mathbb{R}^4} - \frac{1}{2}f \textbf{ est un projecteur}}$

7. On a $\boxed{f = 3p + q}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On constate d'abord que $\mathrm{Im}(p) = \ker(q)$ et $\mathrm{Im}(q) = \ker(p)$ donc p et q vérifient $p \circ q = q \circ p = 0_{L(\mathbb{R}^4)}$. En particulier ils commutent et toute composée $p^k \circ q^m$ est nulle si $k > 0$ et $m > 0$ sont des entiers. Donc on peut utiliser la formule du binôme : $f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k \circ q^{n-k}$ et, si $n \geqslant 1$, dans cette somme ne restent que les termes en $k = 0$ et $k = n$. Ainsi, comme $p^n = p$ et $q^n = q$, $\boxed{f^n = 3^n p + q}$. On constate que cette expression est également valable pour $\underline{n = 0 \text{ et } n = 1}$. En remplaçant p et q par leurs expressions en fonction de f et $Id_{\mathbb{R}^4}$, on en déduit : $\boxed{f^n = \frac{3^n-1}{2} f + \frac{3-3^n}{2} Id_{\mathbb{R}^4}}$. On remarque que cette expression est également valable pour $n = -1$

PROBLEME I : Endomorphisme nilpotent d'ordre n

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, pour $k \in \mathbb{N}$, on définit f^k par récurrence : $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$. On s'intéresse aux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f^{n-1} \neq 0 \quad \text{et } f^n = 0 \tag{2}$$

1. Etude d'un exemple.

   On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par :$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a+4b+2c \\ -4a-2b+c \\ 2a-2c \end{pmatrix}$

   (a) si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

   $(a,b,c) \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} 4a+4b+2c \\ -4a-2b+c \\ 2a-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a+2b+c & = 0 \\ 4a+2b-c & = 0 \\ a-c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = c \\ b & = -\frac{3}{2}c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Ainsi $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } \ker(f)}$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. Or $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ non colinéaires, donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$. Ce dernier sev est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$: il s'agit du $\boxed{\textbf{plan d'équation : } x+2y+2z=0}$

   (b) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f^2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a+8b+8c \\ -6a-12b-12c \\ 4a+8b+8c \end{pmatrix} = (2a+4b+4c)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

   $f^3\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (2a+4b+4c)\ f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (2a+4b+4c)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que f est nilpotente d'indice 3. $\boxed{f \textbf{ vérifie l'équation (2)}}$

   (c) L'expression de f^2 permet directement de trouver : $\boxed{\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \textbf{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$ et

   $\boxed{\ker\left(f^2\right) \textbf{ plan d'équation } x+2y+2z=0 \textbf{ dont une base est } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

   (d) On constate $\boxed{\ker(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \textbf{ et } \mathrm{Im}(f) = \ker\left(f^2\right)}$

   Retour au cas général

   On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation (2)

2. f^{n-1} étant non nulle, $\boxed{\textbf{il existe } x_0 \in \mathbb{R}^n \textbf{ tel que } f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}}$. On fixe un tel x_0.
   Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Supposons $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f^1(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   Par l'absurde Supposons qu'il existe un plus petit indice k tel que $\lambda_k \neq 0_{\mathbb{R}}$. En composant par f^{n-1-k} l'expression précédente, on a : $\lambda_k f^{n-1}(x_0) + \lambda_{k+1} f^n(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-2-k}(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or pour $p \geqslant n$, $f^p = 0_{L(\mathbb{R}^n)}$ et donc $f^p(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Aussi dans la somme il ne reste que le premier

terme ... qui doit être nul alors que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$: contradiction avec l'hypothèse. Ainsi $\boxed{\textbf{la famille } \left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^1(x_0)\ ,x_0\right) \textbf{ est une famille libre de } \mathbb{R}^n}$.
$\left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^1(x_0)\ ,x_0\right)$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n donc c'est une base. Ainsi $\boxed{\textbf{la famille } \left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^1(x_0)\ ,x_0\right) \textbf{ est une base de } \mathbb{R}^n}$.

3. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note F_k le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par : $\left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-k}(x_0)\right)$.
   (a) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, la famille $\left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-k}(x_0)\right)$ est une sous-famille de la base de $\mathbb{R}^n$ $\mathscr{B} = \left(f^{n-1}(x_0)\ ,\ f^{n-2}(x_0)\ ,\cdots,f^1(x_0)\ ,x_0\right)$.
   Donc elle est libre et ainsi $\boxed{F_k \textbf{ est de dimension } k}$
   (b) Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right)$ est engendré par les images par f^{n-k} des vecteurs de $\mathscr{B}$. Donc $\mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right)$ est engendré par $\left(f^{n-k}(x_0)\ ,\ f^{n-k+1}(x_0)\ ,\cdots,f^{2n-k-1}(x_0)\right)$. Or pour $p \geqslant n$, $f^p(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Aussi, en éliminant de la famille tous les vecteurs nuls, on a $\mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right)$ est engendré par $\left(f^{n-k}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-1}(x_0)\right)$ qui est une base de F_k. Ainsi $\boxed{F_k = \mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right)}$.
   Puisque f^n est nulle, les vecteurs $\left(f^{n-k}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-1}(x_0)\right)$ sont dans le noyau de f^k. Mais par le théorème du rang, $\dim\left(\ker\left(f^k\right)\right) = n - \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^k\right)\right) = n - \dim\left(F_{n-k}\right)$ en appliquant le résultat vu liant F_j et $\mathrm{Im}\left(f^{n-j}\right)$. Ainsi la famille $\left(f^{n-k}(x_0)\ ,\cdots,f^{n-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de k vecteurs de $\ker\left(f^k\right)$ qui est de dimension k : c'en est une base. Donc $\boxed{F_k = \mathrm{Im}\left(f^{n-k}\right) = \ker\left(f^k\right)}$.
   (c) Soit $x \in F_k$. On a : $f^k(f(x)) = f\left(f^k(x)\right) = f\left(0_{\mathbb{R}^n}\right) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $f(x) \in \ker\left(f^k\right) = F_k$. Ainsi $\boxed{F_k \textbf{ est stable par } f}$

4. Soit H un sev de $\mathbb{R}^n$ stable par f. $k = \dim(H)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Soit g la restriction de f à H : g est un endomorphisme de H.
   (a) Soit $A = \left\{ j \in \mathbb{N} \middle| g^j = 0_{L(H)} \right\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car $g^n = 0_{L(H)}$. Donc A possède un plus petit élément p qui est non nul car $g^0 = Id_H$. Ce p vérifie $\boxed{p \geqslant 1,\ g^{p-1} \neq 0 \textbf{ et } g^p = 0}$.
   (b) Soit $x_1 \in H$ tel que $g^{p-1}(x_1) \neq 0$. En utilisant la méthode de la question 2 appliquée à g, on en déduit que $\boxed{\textbf{la famille } \left(x_1,\ g(x_1)\ ,\cdots,g^{p-1}(x_1)\right) \textbf{ est une famille libre de H}}$ et donc $\boxed{k = \dim(H) \geqslant p \textbf{ et donc } g^k = 0}$.
   (c) On a : $\forall x\ H, g^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car g^k est l'endomorphisme nul de H. Donc $\forall x\ H, f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $H \subset \ker\left(f^k\right) = F_k$. Ainsi H est un sev de F_k de même dimension finie k que F_k. Donc $\boxed{H = \ker\left(f^k\right)}$.
   (d) En regroupant les résultats des questions 3 et 4, on sait que $\boxed{\textbf{les seuls sous-espaces de } \mathbb{R}^n \textbf{ stables par } f \textbf{ sont les } \ker\left(f^k\right)}$.

5. On veut trouver tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec f, c'est-à-dire tels que : $f \circ h = h \circ f$.
   (a) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^n$,
   $\boxed{\exists!\,(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, h(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)}$.
   (b) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $\varphi = a_0 Id + a1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$
      i. Soit la propriété de récurrence : $\mathscr{P}_i$: "$h\left(f^i(x_0)\right) = \varphi\left(f^i(x_0)\right)$"
      ☞ $\mathscr{P}_0$ est-elle vraie ? On a :
      $h\left(f^0(x_0)\right) = h(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi\left(f^0(x_0)\right)$ $\boxed{\mathscr{P}_0 \textbf{ est vraie}}$
      ☞ Supposons $\mathscr{P}_i$ vraie pour un certaine entier i. $\mathscr{P}_{i+1}$ est-elle vraie ?. On a :
      $h\left(f^{i+1}(x_0)\right) = h\left(f\left(f^i(x_0)\right)\right) = f\left(h\left(f^i(x_0)\right)\right)$ car h et f commutent. Or $\mathscr{P}_i$ vraie donc :
      $h\left(f^{i+1}(x_0)\right) = f\left(\varphi\left(f^i(x_0)\right)\right) = \varphi\left(f\left(f^i(x_0)\right)\right) = \varphi\left(f^{i+1}(x_0)\right)$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{i+1} \textbf{ est vraie}}$.

☞ On a montré $\mathscr{P}_0$ vraie et, pour tout entier i, $\mathscr{P}_i$ vraie entraine $\mathscr{P}_{i+1}$ vraie. Donc par théorème de récurrence on a : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_{i+1}$ vraie i.e. $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, h\left(f^i\left(x_0\right)\right) = \varphi\left(f^i\left(x_0\right)\right)}$

ii. On a montré que h et φ coïncidaient sur la famille des $\left(f^i\left(x_0\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$. En particulier elles coïncident sur la base $\left(f^i\left(x_0\right)\right)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$. Ainsi $\boxed{h = \varphi}$

(c) On déduit de la question précédente que l'ensemble G des endomorphismes qui commutent avec f est $\boxed{G = \mathbf{vect}(Id_{\mathbb{R}^n}, f, f^2, \cdots, f^{n-1})}$. Or ces endomorphismes sont linéairement indépendants car leurs images en x_0 sont linéairement indépendantes. Donc l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est $\boxed{\textbf{un sev de } L\left(\mathbb{R}^n\right) \textbf{ de dimension } n}$