Devoir surveillé N$^{\text{o}}$ 10 (4 heures)

Ce devoir est constitué de deux problèmes. L'ordre des problèmes ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME I : Sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$

On note $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3
2. (a) Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. En donner une base.
   (b) Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dans laquelle la multiplication est commutative.
   (c) Montrer, en considérant la matrice $A^3 + I_3$, que l'anneau $\mathscr{H}$ possède des diviseurs de zéro.
3. (a) Déterminer, en fonction du nombre complexe λ, le rang de la matrice $A - \lambda I_3$. En déduire qu'il existe trois nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 pour lesquels cette matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   (b) Pour $k \in \{1,2,3\}$, résoudre l'équation $A\,X = \lambda_k\,X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$
   (c) En déduire qu'il existe une matrice $P \in Gl_3(\mathbb{C})$ que l'on déterminera telle que : $A = P.A'.P^{-1}$ avec $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}$ (On prendra P avec des 1 sur la première ligne et on pourra calculer $P \times {}^t\overline{P}$ pour simplifier certains calculs avec $\overline{P}$ matrice consitutée des conjugués des coefficients de P)
4. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$. Déterminer la matrice $M' = P^{-1}.M.P$
   (b) Prouver que l'application φ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vers $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ qui à toute matrice M associe la matrice $P^{-1}.M.P$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant :
   $\forall (M,N) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{C}))^2, \varphi(MN) = \varphi(M)\,\varphi(N)$
   (c) Montrer que $\mathscr{D} = \varphi(\mathscr{H})$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
   (d) En déduire que : $\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}),\ M \in \mathscr{H} \iff \varphi(M) \in \mathscr{D}$.
5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$. On note :
   $\sigma_0(M) = a - b + c$, $\sigma_1(M) = a - jb + j^2c$ et $\sigma_2(M) = a - j^2b + jc$.
   (a) Montrer que les applications σ_0, σ_1 et σ_2 sont des formes linéaires sur $\mathscr{H}$ pour lesquelles l'image d'un produit est le produit des images. *on dira que ce sont des morphismes d'algèbres*
   (b) Montrer que $M \in \mathscr{H}$ est inversible si et seulement si $\sigma_0(M)\,\sigma_1(M)\,\sigma_2(M) \neq 0$ et que dans ce cas, $M^{-1} \in \mathscr{H}$.

PROBLEME II : AGRO 2005

Dans ce problème, on note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et $\boldsymbol{0}$ l'application nulle.

Pour tout couple de nombres réels (a, b), on note $J(a, b)$ la matrice $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est :
$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout couple (a, b) de réels et pour tout entier n naturel non nul, on a :
   $(J(a,b))^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$ avec $c^0 = 1$ même si le réel c est nul.
2. (a) Montrer que : $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3Id = \boldsymbol{0}$
   (b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera. Factoriser $\Pi(X)$
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.
3. (a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\ker(\Phi + 3Id)$ formée de vecteur(s) dont la dernière coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ est égale à 1.
   (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $\ker(\Phi - Id)$ formée de vecteur(s) dont la dernière coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ est égale à 1.
4. (a) Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ égale à 1, vérifiant $\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} e_i$
   (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \ker\left((\Phi - Id)^2\right)$ formée de vecteurs dont la dernière coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ est égale à 1.
   (c) Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \ker(\Phi + 3Id)$
5. (a) Donner une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs dont la dernière coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ est égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ soit $M = J(1, -3)$
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n à l'aide de n, M, P et P^{-1} où P est une matrice bien choisie. Calculer la dernière ligne de A^n.
6. Soit la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$
   (a) Élaborer un programme Python afin de calculer u_{15} . En transposant ce programme sur votre calculatrice, donner une valeur exacte de u_{15}.

   Dans les trois dernières questions, on note $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base $\mathscr{C}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $\Phi(V_n) = V_{n+1}$
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = \Phi^n(V_0)$, puis, à l'aide de 5)b), une expression de u_n
   (d) Vérifier que pour $n = 15$, l'expression trouvée à la question 6)c) est bien celle obtenue en 6)a).

CORRECTION

PROBLEME I : Sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$

On note $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3}$

2. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. $M \in \mathscr{H} \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 | M = aI_3 + bA + cA^2 \iff M \in vect\left(I_3, A, A^2\right)$. Or $\left(I_3, A, A^2\right)$ est une famille libre (car les coefficients non nuls sont à des places différentes. Ainsi $\boxed{\mathscr{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{C})}$, une base en étant $\boxed{\left(I_3, A, A^2\right)}$.

   (b) On sait déjà que $(\mathscr{H}, +)$ est un groupe abélien. Reste à montrer que $\mathscr{H}$ est stable par la multiplication et qu'il contient l'élément neutre de la multiplication.
   ☞ $I_3 \in \mathscr{H}$ a déjà été vu (on prend $(a,b,c) = (1,0,0)$).
   ☞ Soit M et M' deux éléments de $\mathscr{H}$. On écrit ces matrices sous la forme : $M = aI_3 + bA + cA^2$ et $M' = a'I_3 + b'A + c'A^2$. Par bilinéarité du produit matriciel, on a :
   $M \times M' = aa'I_3 + (ab' + ba')A + (ac' + bb' + ca')A^2 + (bc' + cb')A^3 + cc'A^4$. Or $A^3 = -I_3$ et $A^4 = -A$ sont dans $\mathscr{H}$ qui est stable par combinaison linéaire. Donc $M \times M' \in \mathscr{H}$
   Ainsi $\boxed{\mathscr{H} \text{ est un sous-anneau de } \mathscr{M}_3(\mathbb{C})}$. De plus l'expression de $M \times M'$ montre que $\boxed{\text{le produit y est commutatif}}$.

   (c) On a : $0_3 = A^3 + I_3 = (A + I_3)\left(A^2 - A + I_3\right)$. Or ni $A + I_3$ ni $A^2 - A + I_3$ n'est nulle, donc $\boxed{A + I_3 \text{ et } A^2 - A + I_3 \text{ sont des diviseurs de zéro de l'anneau } \mathscr{H}}$.

3. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1}}{\overset{L_1 \leftarrow L_2}{\longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda^2 L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$
.
   Ainsi, $\boxed{\text{si } \lambda \in \left\{-1, -j, -j^2\right\}, \ rg\left(A - \lambda I_3\right) = 2, \text{ sinon } rg\left(A - \lambda I_3\right) = 3}$. Ainsi pour λ valant $\lambda_1 = -1$ ou $\lambda_2 = -j$ ou $\lambda_3 = -j^2$, $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

   (b) On note la matrice colonne inconnue X sous la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   ☞ $AX = -X \iff \begin{cases} -z = -x \\ x = -y \\ y = -z \end{cases} \iff x = -y = z \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $\boxed{AX = -X \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$. On pose $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ☞ $AX = -jX \iff \begin{cases} -z = -jx \\ x = -jy \\ y = -jz \end{cases} \iff x = -jy = j^2 z \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

   Donc $\boxed{AX = -jX \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \end{pmatrix}}$ On pose $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \end{pmatrix}$

☞ $AX = -j^2X \iff \begin{cases} -z = -j^2x \\ x = -j^2y \\ y = -j^2z \end{cases} \iff x = -j^2y = jz \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{AX = -j^2X \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \end{pmatrix}}$. On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \end{pmatrix}$

(c) Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose P la matrice de la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -j^2 & -j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. En calculant $P \times {}^t P$ on trouve $P \times {}^t\overline{P} = 3I_3$ ce qui montre que P est inversible donc que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Or la matrice de u dans cette base est $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}$. Donc :

$\boxed{\textbf{il existe une matrice } P \in Gl_3(\mathbb{C}) \textbf{ telle que } A = P.A'.P^{-1} \textbf{ avec } A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}}$

De plus on a : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -j^2 & -j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \textbf{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}{}^t\overline{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix}}$

4. (a) On a $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bA + cA^2$. Donc par bilinéarité du produit matriciel, $M' = P^{-1}.M.P = aI_3 + bA' + cA'^2$ i.e. $\boxed{M' = P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a-bj^2+cj \end{pmatrix}}$

(b) Soit φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui à toute matrice M associe la matrice $P^{-1}.M.P$ et θ celle qui à la matrice M associe la matrice $P.M.P^{-1}$. La bilinéarité du produit matriciel entraine que φ et θ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

De plus, on a $\varphi \circ \theta = \theta \circ \varphi = Id_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$. En particulier $\boxed{\varphi \textbf{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

Enfin $\varphi(M) \times \varphi(N) = P^{-1}.M.P.P^{-1}.N.P = P^{-1}.M.N.P = \varphi(MN)$ i.e $\boxed{\varphi(MN) = \varphi(M)\,\varphi(N)}$

(c) D'après la question 4)d), $\varphi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}$. Or φ est un isomorphisme donc $\varphi(\mathcal{H})$ a la même dimension que $\mathcal{H}$ à savoir 3, ce qui est aussi la dimension de $\mathcal{D}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{H})}$.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

☞ On sait déjà que si $M \in \mathcal{H}$ alors $\varphi(M) \in \mathcal{D}$

☞ Si $\varphi(M) \in \mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{H})$, il existe $M_1 \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi(M_1)$. Or φ est injective dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc $M = M_1$ et donc $M \in \mathcal{H}$

Ainsi $\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ M \in \mathcal{H} \iff \varphi(M) \in \mathcal{D}}$.

5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. On note : $\sigma_0(M) = a - b + c$, $\sigma_1(M) = a - jb + j^2c$ et $\sigma_2(M) = a - j^2b + jc$.

(a) On remarque que, si $M \in \mathcal{H}$, $\varphi(M) = \begin{pmatrix} \sigma_0(M) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(M) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2(M) \end{pmatrix}$ Ainsi, puisque φ est un morphisme d'algèbre, $\boxed{\sigma_0\textbf{, } \sigma_1 \textbf{ et } \sigma_2 \textbf{ vérifiant : } \forall (M,N) \in (\mathcal{H})^2, \sigma(MN) = \sigma(M)\,\sigma(N)}$

(b) Soit $M \in \mathcal{H}$. $M \in \mathcal{H}$ inversible $\iff P^{-1}.M.P$ est inversible $\iff \varphi(M)$ est inversible. Aussi $\boxed{M \in \mathcal{H} \textbf{ est inversible si et seulement si } \sigma_0(M)\,\sigma_1(M)\,\sigma_2(M) \neq 0}$.

Dans ce cas, l'inverse de $\varphi(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0(M)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1(M)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_2(M)} \end{pmatrix}$. Mais par morphisme d'anneaux, l'inverse de $\varphi(M)$ est $\varphi\left(M^{-1}\right)$ et on a donc $\varphi\left(M^{-1}\right) \in \mathscr{D}$.

Ainsi $\boxed{M^{-1} \in \mathscr{H}}$.

PROBLEME II : AGRO 2005

$\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On montre aisément que N est nilpotente d'ordre 2 et que $BN = NB = aN$. Donc, en utilisant la formule du binôme, si $n \in \mathbb{N}^*$, $(J(a,b))^n = (B+N)^n = B^n + nB^{n-1}N = B^n + na^{n-1}N$.

   Aussi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (J(a,b))^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}}$

2. (a) Un simple calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -14 & 33 & -18 \\ 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ Donc $A^3 = -A^2 + 5A - 3I_3$. Donc en passant aux applications linéaires canoniquement associées, on trouve $\boxed{\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3Id = \boldsymbol{0}}$

   (b) Le polynôme $\Pi'(X)$ vaut : $\Pi'(X) = 3X^2 + 2X - 5 = (X-1)(3X+5)$. Or 1 est également un zéro de Π donc 1 est une racine double de Π. On trouve : $\boxed{\Pi = (X-1)^2 (X+3)}$.

   (c) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul vérifient $\Phi(u) = \lambda u$. On a $\Phi^2(u) = \lambda^2 u$ et $\Phi^3(u) = \lambda^3 u$. Ainsi puisque $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3Id = \boldsymbol{0}$, on en déduit $\left(\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3\right)(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Mais comme u n'est pas le vecteur nul, on en déduit $\boxed{\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 \textbf{ i.e. } \Pi(\lambda) = 0}$.

3. (a) On montre aisément que $\boxed{\ker(\Phi + 3Id) = vect\left(\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$. On posera $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) On montre aisément que $\boxed{\ker(\Phi - Id) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$. On posera $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) On résoud l'équation $\Phi(y) = y + \sum_{i=1}^{3} e_i$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^3$. On trouve :

   $\Phi(y) = y + \sum_{i=1}^{3} e_i \iff \exists t \in \mathbb{R} \middle| y = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\boxed{x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ est le seul qui possède une dernière coordonnée égale à 1 :

   (b) On constate d'abord que $\varepsilon_1 \in E$ car $\varepsilon_1 \in \ker(\Phi - Id)$. On a également $x \in E$ car $(\Phi - Id)(x) = \varepsilon_1 \in \ker(\Phi - Id)$. Or x et ε_1 sont linéairement indépendants. Ainsi E est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension supérieure ou égale à 2.

Mais $dim(E)$ ne peut être égale à 3 car $(\Phi - Id)^2$ n'est pas l'application nulle (car par exemple $(\Phi - Id)^2(\varepsilon_3) = 16\varepsilon_3$). Ainsi E est un sev de E de dimension 2 pour lequel la famille (ε_1, x) est une famille libre de deux vecteurs : $\boxed{(\varepsilon_1, x) \text{ est une base de } E}$.

(c) $\Phi(\varepsilon_1) \in E$ et $\Phi(x) \in E$ donc, puisque (ε_1, x) engendre E, $\boxed{\Phi(E) \subset E}$.
$E \bigcap \ker(\Phi + 3Id)$ est un sous-espace strict de $\ker(\Phi + 3Id)$ car ε_3 est dans $\ker(\Phi + 3Id)$ mais pas dans E. Ainsi, comme $dim(\ker(\Phi + 3Id)) = 1$, on a $dim\left(E \bigcap \ker(\Phi + 3Id)\right) = 0$. De plus, E et $\ker(\Phi + 3Id)$ sont deux sev de $\mathbb{R}^3$ dont la somme des dimensions vaut 3. Ainsi, par caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie, $\boxed{\mathbb{R}^3 = E \oplus \ker(\Phi + 3Id)}$

5. (a) On pose $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, x, \varepsilon_3)$. S'agissant du regroupement de bases de deux sev de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires, $\boxed{\mathscr{B} = (\varepsilon_1, x\varepsilon_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$. De plus, puisque $\Phi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $\Phi(x) = x + \varepsilon_1$ et $\Phi(\varepsilon_3) = -3\varepsilon_3$, $\boxed{mat_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = M = J(1, -3)}$

(b) Soit $P = mat_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
D'après la formule de changement de base, on a $A = P.M.P^{-1}$ et donc $A^n = P.M^n.P^{-1}$. Or M^n se calcule à l'aide de la question 1). On en ddúit la première colonne de M^n : $\boxed{M^n = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 + 4n + 9(-3)^n & 18 + 8n - 18(-3)^n & -9 - 12n + 9(-3)^n \\ 3 + 4n - 3(-3)^n & 10 + 8n + 6(-3)^n & 3 - 12n - 3(-3)^n \\ -1 + 4n + (-3)^n & 2 + 8n - 2(-3)^n & 15 - 12n + (-3)^n \end{pmatrix}}$

6. Soit la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$

(a)

```
>>> u , v , w = 0, 0, 1
>>> for k in range(13):
>>>         z = -w + 5*v - 3*u
>>>         u = v
>>>         v = w
>>>         w = z
>>> print(w)
```

On trouve $\boxed{u_{15} = -896803}$.

Dans les trois dernières questions, on note $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base $\mathscr{C}$.

(b) On a $\Phi(V_n) = \begin{pmatrix} -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ & u_{n+1} \end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(V_n) = V_{n+1}}$

(c) Par récurrence immédiate, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \Phi^n(V_0)}$. Ainsi, à l'aide de 5)b), et comme $u_0 = u_1 = 0$ et $u_2 = 1$, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{16}\left(-1 + 4n + (-3)^n\right)}$

(d) On retrouve $u_{15} = -896803 = \dfrac{1}{16}\left(-1 + 60 + (-3)^{15}\right)$.