

Exercice 1. Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ et déterminer leur somme :

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| 1. $u_n = \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ | 4. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ | 7. $u_n = \frac{n^2+n-3}{(n+2)!}$ |
| 2. $u_n = \frac{1}{2n(4n^2-1)}$ cf Ex 2 | 5. $u_n = \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ | 8. $u_n = \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$ où $x \in$ |
| 3. $u_n = \frac{1}{n^2+2in-2}$ | 6. $u_n = \frac{n^2+n-3}{n!}$ | $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ |

Exercice 2. Série harmonique alternée

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

3. Montrer que $S_n = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p \right) dt = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.

4. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum n^2 u_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 5. Constante d'Euler Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et soit $v_n = u_n - u_{n+1}$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série à termes positifs convergente

2. En déduire qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

3. Trouver un encadrement liant γ et u_n , puis trouver une valeur approchée à 10^{-2} de γ

Exercice 6. Étudier les séries $\sum u_n$ dont le terme général est : (x, y et a sont strictement positifs)

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1. $u_n = \frac{x^n}{n+y^n}$ | 3. $u_n = e^{-\sqrt{n+1}}$ | 5. $u_n = a^{(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$ |
| 2. $u_n = a^{\sqrt{n}}$ | 4. $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n^2}}$ | 6. $u_n = \frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$ |

Exercice 7. Étudier les séries $\sum u_n$ dont le terme général est : (x strictement positif)

$$1. u_n = \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(n+2)!}$$

$$3. u_n = \frac{(nx)^n}{n!}$$

$$5. u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$2. u_n = n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$4. u_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} x^n$$

Exercice 8. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pourra utiliser le fait que, si f est une fonction continue sur $[0, \pi]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = 0$$