PROBLEME : Constante d'Euler et accélération de convergence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $u_n = s_n - \ln(n)$ et $v_n = s_{n-1} - \ln(n)$.

La constante d'Euler est le nombre réel : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$

1) **a)** **M**ontrer l'existence de γ.

b) **D**onner un encadrement de γ d'amplitude $^1/_{10}$.

c) **J**ustifier la relation : $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right)$

2) **S**oit $k \in \mathbb{N}^*$, et f la fonction définie sur [k, k+1] par : $f(t) = \frac{1}{t}$. On note g la fonction affine sur [k, k+1] et h la fonction affine sur [k, k + ½[et [k + ½, k+1] telles que :

$f(k) = g(k) = h(k)$, $f(k+1) = g(k+1) = h(k+1)$, $f'(k) = h'(k)$ et $f'(k+1) = h'(k+1)$

a) **R**eprésenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en justifiant leurs positions relatives.

b) **P**ar des considérations d'intégrales, prouver que :

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$$

c) **Q**uelles inégalités peut-on en déduire pour $u_n - \gamma$?

3) **a)** **D**onner le développement limité de $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ à l'ordre 5.

b) **T**rouver des réels a, b et c tels que :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} c\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$$

c) **D**émontrer alors que : $u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{c}{n^4}$

4) **S**oit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$

a) **C**hercher $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\ker(\Phi)$

b) **E**n déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme Q_p tel que $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(X + 1) - Q_p(X) = X^p$.

c) **D**émontrer que pour tout $p \geqslant 1$, $Q_p'(X) - Q_p'(0) = p\ Q_{p-1}(X)$

d) **C**alculer Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 .

e) **D**éterminer les minimum et maximum de Q_5 sur $[0, 1]$

f) **M**ontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le polynôme Q_p est à coefficients rationnels

5) **P**our p et k deux entiers naturels non nuls, on pose : $I_p(k) = \int_0^1 \frac{p\ Q_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}}\, dt$

a) **T**rouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}

b) **C**alculer $I_1(k)$.

c) **A** l'aide de la question 4^{e}), donner un encadrement de $I_6(k)$. En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$

d) **D**onner les dix premières décimales de γ