MPSI 14-15 Feuille nº 24 : Dénombrement   Du 21/05/15 au 27/05/15

Exercice 1. Soit E un ensemble fini à n éléments.

1. Quel est le nombre de couples distincts (A, B) de parties de E tels que $A \bigcap B = \varnothing$?
2. Quel est le nombre de couples distincts (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$?

Exercice 2. Nombre d'anagrammes du mot "Ludwig", du mot "Wolfgang", du mot "continuellement".

Exercice 3. On lance simultanément 5 dés différenciés. On appelle :
- PAIRE : un résultat du type $\{a, a, b, c, d\}$ où a, b, c et d sont des lettres différentes.
- DOUBLE PAIRE : un résultat du type $\{a, a, b, b, c\}$.
- BRELAN : un résultat du type $\{a, a, a, b, c\}$.
- FULL : un résultat du type $\{a, a, a, b, b\}$.
- CARRE : un résultat du type $\{a, a, a, a, b\}$.
- POKER : un résultat du type $\{a, a, a, a, a\}$.
- SEQUENCE BANALE : tout autre résultat

Combien y-a-t-il de résultats possibles de chaque type ?

Exercice 4.
1. Déterminer les coefficients en X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n$ et $(1+X)^{2n}$
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}$.
3. Interprétation combinatoire de ce résultat

Exercice 5. Nombre de nombres de n chiffres (avec $n > 2$) ayant exactement deux chiffres 8.

Exercice 6. Combien y-a-t-il de fonctions d'un ensemble E à n éléments vers un ensemble à p éléments ?
Remarque : la fonction se distingue de l'application par le fait qu'elle n'est pas nécessairement définie en tout point de E...

Exercice 7. Combien y-a-t-il de surjections de $\{1, \ldots, n+1\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$?

Exercice 8. Soit E un ensemble fini de cardinal n impair.
Soit $P_i(E) = \left\{A \subset E \middle| \#(A) \text{ impair}\right\}$ et $P_p(E) = \left\{A \subset E \middle| \#(A) \text{ pair}\right\}$.
Soit φ l'application de $P_i(E)$ vers $P_p(E)$ qui à A associe $E \setminus A$. Montrer que φ est une bijection. En déduire le cardinal de $P_i(E)$

Exercice 9. T étant l'ensemble des entiers naturels formés de 3 chiffres distincts.

1. Calculer le cardinal de T
2. Calculer la somme des éléments de T

Exercice 10. Combien y-a-t-il de nombres entiers naturels de cinq chiffres où 0 figure une et une seule fois ?

Exercice 11. Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer la somme des cardinaux des parties de E.

Exercice 12. Combien y-a-t-il de nombres entiers naturels de cinq chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?

Exercice 13. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y-a-t-il de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \bigcap Y$ soit un singleton ?

Exercice 14. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

1. Soit A une partie finie de E. Montrer que $f(A)$ est finie et $card\,(f(A)) \leqslant card\,(A)$
2. Soit B une partie finie de F. Peut-on affirmer que $f^{-1}(B)$ est finie ?

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le nombre de partitions de $\mathbb{N}_n$. On convient $P_0 = 1$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k = P_{n+1}$
2. En déduire P_n pour $n \in \{1, \ldots, 5\}$

Exercice 16. Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \geqslant p$, on note S_n^p le nombre de surjections de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_n^k = p^n$
2. En déduire S_5^p pour $p \in \{1, \ldots, 5\}$

Exercice 17. Théorème de Lagrange

Soit $(G, \top)$ un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Pour $x \in G$, on note $xH = \left\{t \in G \middle| \exists h \in H\,, t = x \top h\right\}$

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in G^2$, il existe une bijection de xH vers yH.
2. En déduire que le cardinal de H divise celui de G