FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS COMPLEXES

A FONCTIONS CONTINUES

I) Algèbre des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit F (I,$\mathbb{C}$) l'ensemble des applications (ou fonctions) de I vers $\mathbb{C}$
F (I,$\mathbb{C}$) muni des lois +, × et . usuelles possède une structure de $\mathbb{C}$-algèbre commutative
Si f∈ F (I,$\mathbb{C}$), on note :

- Re(f) la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à t associe Re(f(t))
- Im(f) la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à t associe Im(f(t))
- |f| la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à t associe $|f(t)|$
- $\overline{f}$ la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à t associe $\overline{f(t)}$

Définition: Soit f∈F(I,$\mathbb{C}$). f est bornée ⇔ |f| est bornée ⇔ $\exists M\in\mathbb{R} \mid \forall t\in I, |f(t)|\leq M$

Remarque: L'ensemble B(I,$\mathbb{C}$) des fonctions bornées sur I est, muni des lois +, × et . usuelles, une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, sous-algèbre de F (I,$\mathbb{C}$)

II) Limite et continuité

a) Limite

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, f∈F(I,$\mathbb{C}$), a∈ $\overline{I}$. Soit b∈$\mathbb{C}$.

Définition : On dit que f admet b pour limite en a ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-b|\leq\varepsilon.$$

Théorème: Si f admet b pour limite en a alors le nombre b est unique.

Définition: b est appelé limite de la fonction f en a et on note :b = $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{a} f$

Dem: Comme pour $\mathbb{R}$

Propriété: Soit f∈F(I,$\mathbb{C}$) et a∈ $\overline{I}$.

1) **f admet une limite en a ssi Re(f) et Im(f) admettent une limite en a.**
2) **Le cas échéant, $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} \mathrm{Re}(f) + i \lim\limits_{a} \mathrm{Im}(f)$**

Propriété: Soit f∈F(I,$\mathbb{C}$), a∈ $\overline{I}$. Si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a

Propriété: Soit (f,g)∈$(F(I,\mathbb{C}))^2$ et a∈ $\overline{I}$. Si f (resp. g) admet *l* (resp. m) pour limite en a, alors

1) f +g admet *l*+m pour limite en a 2) fg admet *l*m pour limite en a

Dem: Comme pour $\mathbb{R}$

b) Continuité

Définition : Si a∈I. On dit que f est continue en a ssi f admet f(a) pour limite en a i.e. :

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq\varepsilon$

Définition : On dit que f est continue sur I ssi f continue en tout point de I

Remarque: L'ensemble C(I,$\mathbb{C}$) des fonctions continues sur I est une sous-algèbre de F(I,$\mathbb{C}$)

Remarque: Le thèorème des valeurs intermédiaires ne se prolonge pas

B DERIVATION ET INTEGRATION

I) Dérivation

Définition: Soit $f \in F(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$.

f est dérivable en a $\Leftrightarrow \left(t \to \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)$ possède une limite finie en a

On appelle nombre dérivé de f en a cette limite et on la note $f'(a)$

Propriété: Soit $f \in F(I,\mathbb{C})$, $a \in I$. f dérivable en a ssi Re(f) et Im(f) sont dérivables en a.
Le cas échéant , $f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(a)$

Définition: Soit $f \in F(I,\mathbb{C})$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I
On appelle dérivée de f la fonction de i vers $\mathbb{C}$ qui a t associe f'(t)

On définit de même les dérivées k-ièmes $f^{(k)}$ de f en a
On note $D^k(I)$ l'algèbre des fonctions f telle que $f^{(k)}$ existe sur I
On note $C^k(I)$ l'algèbre des fonctions de classe C^k sur I ($f^{(k)}$ existe et est continue sur I)
et $C^\infty(I)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞

Théorème: Formule de Leibniz Si *f* et *g* appartiennent à $D^n(I)$ alors le produit
$h = f \times g$ appartient aussi à $D^n(I)$ et de plus $\boxed{h^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)}$

Dem: Comme pour $\mathbb{R}$

Théorème: Soit *f* une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[.
Alors *f* est constante sur [a,b] si et seulement si $\forall\, t \in [a,b]$, $f'(t) = 0$

Dem: f constante sur [a,b] $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) constantes sur [a,b]
Puis on utilise la caractérisation des fonctions réelles constantes.

Remarque: Par contre le théorême de Rolle ne se prolonge pas
Exemple: $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \to e^{it} - 1$, vérifie les hypothèses de Rolle mais pas ses conclusions

II) Intégration

Définition: Soit $f \in F([a,b],\mathbb{C})$. f est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) le sont
Définition: Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. On appelle intégrale de f sur [a,b] la valeur :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$$

Remarque: En utilisant la définition et la linéarité des fonctions réelles, on montre aisément que l'application $C_{pm}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f \to \int_{[a,b]} f$ est linéaire

Théorème: Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\left| \int_{[a,b]} f \right| \le \int_{[a,b]} |f|$

Dem: On note g = Re(f) et h = Im(f). On a $|f| = \sqrt{g^2 + h^2}$ et $\left| \int_{[a,b]} f \right| = \sqrt{\left(\int_{[a,b]} g\right)^2 + \left(\int_{[a,b]} h\right)^2}$

On calcule $\Delta = \left(\int_{[a,b]} |f|\right)^2 - \left(\int_{[a,b]} g\right)^2$ On a $\Delta = \left(\int_{[a,b]} (|f| - g)\right)\left(\int_{[a,b]} (|f| + g)\right) \ge \left(\int_{[a,b]} \sqrt{|f| - g}\sqrt{|f| + g}\right)^2$
d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

Ainsi : $\Delta \ge \left(\int_{[a,b]} |h|\right)^2 \ge \left(\int_{[a,b]} h\right)^2$ D'où $\left(\int_{[a,b]} |f|\right)^2 \ge \left(\int_{[a,b]} g\right)^2 + \left(\int_{[a,b]} h\right)^2$

III) Intégration et dérivation

Théorème fondamental: Soit $f \in C(I,\mathbb{C})$ où I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit F la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f$. Alors F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Dem: On travaille avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Théorème: Inégalité des accroissements finis Soit $f \in C^1(I,\mathbb{C})$.

On suppose que : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall t \in I, |f'(t)| \leq M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$ avec $a \leq b$, $|f(b) - f(a)| \leq M\,(b-a)$

Dem: On a $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'$.

Ainsi $|f(b) - f(a)| \leq \int_{[a,b]} |f'| \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a)$ avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Interprétation cinématique Si f(t) est la position dans le plan d'un point matériel à l'instant t. Si entre les instants a et b, la vitesse est toujours inférieure à M alors la distance entre f(b) et f(a) est inférieure à M(b–a)

Intégration par parties: Soit $(f,g) \in (C^1(I,\mathbb{C}))^2$, $(a,b) \in I^2$. Alors : $\int_a^b f\,g' = [\,f(t)g(t)\,]_a^b - \int_a^b f'\,g$

Théorême : Formule de Taylor avec reste intégral Si f de classe C^{n+1} sur [a,b] . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Dem: Ce sont les mêmes que pour $\mathbb{R}$.

Remarque: Ainsi toutes les formules de Taylor se prolongent sur $\mathbb{C}$ sauf l'égalité de Taylor–Lagrange

Théorême : Formule de Taylor – Young Si f de classe C^n sur I. Alors : $\exists\, \varepsilon : I \to \mathbb{R}$ de limite 0 en a telle que : $\forall t \in I$, $f(t) = f(a) + \frac{(t-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(t-a)^n}{n!} (f^{(n)}(a) + \varepsilon(t))$

Théorême : Inégalité de Taylor – Lagrange Si f de classe C^{n+1} sur [a,b] et si K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} K$$

IV) Fonctions usuelles complexes

a) Exponentielle complexe

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On note $a = \mathrm{Re}(\alpha)$ et $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, $f(t) = e^{\alpha t}$.

On a f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha\, e^{\alpha t}$

Dem: $f(t) = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$.

D'où $f'(t) = a\,e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) + b\,e^{at}(-\sin(bt) + i\cos(bt)) = (a + i b)\,e^{at}e^{ibt} = \alpha\, e^{\alpha t}$

Remarque: Plus généralement, si φ de I vers $\mathbb{C}$, de classe C^1, alors la fonction $\exp \circ \varphi$ est de classe C^1 et sa dérivée est $\varphi' \exp(\varphi)$

Application: Si $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $e^{\alpha t} = 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + o(t^n)$

b) Primitives usuelles

- Primitive de $t \to e^{\alpha t} P(t)$ est obtenue en intégrant par parties.
- Primitive de $t \to (t-\alpha)^m$ quand $m \in \mathbb{Z}$

Si $m \neq -1$, on a $\int (t-\alpha)^m\,dt = \frac{(t-\alpha)^{m+1}}{m+1}$

- ♦ Si $m = -1$, $\int \frac{1}{(t-\alpha)}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2 + b^2\right) + i \arctan\left(\frac{t-a}{b}\right)$ Si $\alpha = a + i b$