

ESPACES PREHILBERTIENS REELS

A PRODUIT SCALAIRE, ORTHOGONALITE

On se place dans un \mathbb{R} espace vectoriel E

I) Produit scalaire

Produit scalaire

Définition: Soit φ une application de $E \times E$ vers \mathbb{R} . On dit que φ est un **produit scalaire sur E** ssi c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e., C'est une forme linéaire par rapport à chacune de ses variables et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x), \quad \forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Notation: On notera $\langle x|y \rangle$ ou $(x|y)$ ou $\langle x,y \rangle$ voire, en géométrie, $x \cdot y$.

Exemple: – Le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n : $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

– Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $(P,Q) \rightarrow P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$ est un produit scalaire.

– Dans $\mathbb{C}([a,b])$, $(f,g) \rightarrow \int_{[a,b]} fg$ est un produit scalaire.

Espace préhilbertien

Définition: Un **espace préhilbert réel** est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Espace euclidien

Définition: On appelle **espace vectoriel euclidien** un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} muni d'un produit scalaire

II) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire

Théorème: L'application : $E \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\| = (\langle x|x \rangle)^{1/2}$ est une norme.

Définition: On dit que c'est une **norme euclidienne sur E**

Dem: Le produit scalaire étant une forme positif, $\|x\|$ existe et est bien positif.

$$- \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$- \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 \text{ par bilinéarité. } \forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\text{homogénéité})$$

– $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y \rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf plus bas). Comme ce sont des réels positifs, on en déduit l'inégalité triangulaire, qui s'appelle inégalité de Minkowski dans le cas d'une norme euclidienne: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Aussi, on a bien une norme

Définition: On appelle **distance euclidienne sur E** l'application $d(x,y) = \|x-y\|$

Propriété: Inégalité triangulaire $\forall (x,y,z) \in E^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème: Inégalité de Cauchy-Schwarz Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit $\langle .|. \rangle$ un produit scalaire sur E . Alors : $\forall (x,y) \in E^2, (\langle x|y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

De plus on a égalité si et seulement si (x,y) liée.

Dem: Soit $(x,y) \in E^2$ avec y non nul. Soit l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow f(t) = \langle x+ty|x+ty \rangle = \|x+ty\|^2$

f est un polynôme réel du second degré ayant pour coefficient dominant $\|y\|^2 > 0$. Or, par positivité du produit scalaire, son discriminant réduit Δ' est négatif et il n'est nul que si f admet une racine réelle. Or Δ' vaut $(\langle x|y \rangle)^2 - \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$. D'où l'inégalité.

On a égalité (pour y non nul) si et seulement si $\exists t_0 \mid f(t_0) = 0 \Leftrightarrow \exists t_0 \mid x + t_0 y = 0$.

De plus si y est nul, on a bien égalité: On n'a égalité que si (x,y) liée.

Exercice: Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Exercice: Traduire l'inégalité de Cauchy Schwarz dans le cas du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et dans le cas du produit scalaire dans $\mathcal{C}([a,b])$

Relations entre produit scalaire et norme

Proposition: Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ ce produit scalaire et sa norme euclidienne associée. Soit $(x, y) \in E^2$, on a :

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y \rangle$

(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x|y \rangle$

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$ **Identité du parallélogramme (ou égalité de la médiane) :**
 La somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des cotés.

(iv) $4 \langle x|y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ **Identité de polarisation**

(v) $2 \langle x|y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ **Formule de polarisation**

Dem: (i) $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y \rangle = \langle x|x \rangle + \langle x|y \rangle + \langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y \rangle$

(ii) on applique le résultat précédent à $-y$ (iii) = (i) + (ii) , (iv) = (i) - (ii) et (v) \Leftrightarrow (i)

III) Orthogonalité

Vecteurs unitaires

Définition: On dit qu'un vecteur x est **unitaire** si et seulement si $\|x\| = 1$

Remarque: Si $x \neq 0_E$, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est toujours unitaire

Vecteurs orthogonaux

Définition: Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \langle x|y \rangle = 0$

Définition: Soit A une partie de E . On appelle **orthogonal de A** l'ensemble A^\perp des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A . $A^\perp = \{x \in E | \forall a \in A, \langle x|a \rangle = 0\}$

Structure d'un orthogonal.

Proposition : Soit A une partie de E . Alors A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Dem: Soient $(x, y) \in (A^\perp)^2, (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in A, \langle x|a \rangle = \langle y|a \rangle = 0$ donc $\langle \lambda x + \beta y | a \rangle = 0$.

Ainsi $\forall (x, y) \in (A^\perp)^2, \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, \lambda x + \beta y \in A^\perp$. De plus A^\perp est non vide

Définition: Soit F et G deux s-e-v de E . On dit que F et G sont **orthogonaux** si et seulement si $\forall a \in F, \forall b \in G, \langle a|b \rangle = 0 \Leftrightarrow G \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset G^\perp$

Famille orthogonale

Définition: Soit $F = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que F est une **famille orthogonale** si et seulement si $\forall (i, j), i \neq j \Rightarrow \langle x_i | x_j \rangle = 0$.

Définition: Une famille est dite **orthonormale (ou orthonormée)** si et seulement si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.

Proposition: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

Dem: Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires presque nulle telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E. \text{ On a } \forall j \in I, 0_{\mathbb{R}} = \langle x_j | \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \rangle = \lambda_j \|x_j\|^2 \text{ car la famille est orthogonale. Or } \|x_j\| \neq 0_{\mathbb{R}} \text{ car les}$$

vecteurs sont non nuls. Ainsi tous les λ_j sont nuls et donc la famille est libre.

Théorème de Pythagore. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille orthogonale. Alors $\| \sum_{i=1}^p x_i \|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$

Dem: $\| \sum_{i=1}^p x_i \|^2 = \langle \sum_{i=1}^p x_i | \sum_{i=1}^p x_i \rangle = \sum_{j=1}^p \langle x_j | \sum_{i=1}^p x_i \rangle = \sum_{j=1}^p \langle x_j | x_j \rangle$ car famille orthogonale.

Réciproque du théorème de Pythagore

Si x et y vérifient: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ alors ils sont orthogonaux.

Dem: Proviend de la formule de polarisation

Orthonormalisation de Schmidt

Théorème: Soit E un espace préhilbertien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

Alors il existe une unique famille \mathcal{C} orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vérifiant :

(i) $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$

(ii) $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $(e_k | \varepsilon_k) > 0$

Dem: On va construire les ε_k de manière unique de proche en proche.

☞ On considère $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Ce vecteur est unitaire et c'est le seul qui vérifie $(e_1 | \varepsilon_1) > 0$ et $\text{vect}(\varepsilon_1) = \text{vect}(e_1)$

☞ On cherche alors ε_2 . Ce vecteur doit vérifier :

$\text{vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{vect}(e_1, e_2)$ (a), $\langle \varepsilon_1 | \varepsilon_2 \rangle = 0$ (b), $\|\varepsilon_2\| = 1$ (c) et $(e_2 | \varepsilon_2) > 0$ (d)

(a) $\Rightarrow \exists (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon_2 = \lambda e_2 + \gamma \varepsilon_1$ avec $\lambda \neq 0$ sinon $\text{vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{vect}(\varepsilon_1) \neq \text{vect}(e_1, e_2)$

(b) $\Rightarrow \lambda \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle + \gamma \langle \varepsilon_1 | \varepsilon_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\lambda \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle$

(c) $\Rightarrow \langle \varepsilon_2 | \varepsilon_2 \rangle = 1 = \lambda \langle e_2 | \varepsilon_2 \rangle + \gamma \langle \varepsilon_1 | \varepsilon_2 \rangle = \lambda \langle e_2 | \varepsilon_2 \rangle$

(d) $\Rightarrow \lambda > 0$

Aussi $\varepsilon_2 = \lambda (e_2 - \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1)$ avec $\lambda = \frac{1}{\|e_2 - \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1\|}$. Remarquons que $e_2 - \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$ est non nul sinon (e_2, ε_1) serait liée et donc (e_1, e_2) liée...

☞ On suppose construits $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}$ tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ soit une famille orthonormale et $\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$. On cherche à construire ε_k . On a :

• $\varepsilon_k = \lambda_k e_k + \sum_{j < k} \lambda_{k,j} \varepsilon_j$ avec $\lambda_k \neq 0$

• $\forall j < k, \langle \varepsilon_k | \varepsilon_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall j < k, \lambda_{k,j} = -\lambda_k \langle e_k | \varepsilon_j \rangle$

• Aussi $\varepsilon_k = \lambda_k (e_k - \langle e_k | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_k | \varepsilon_{k-1} \rangle \varepsilon_{k-1})$. Or on veut $(e_k | \varepsilon_k) > 0$ donc il faut $\lambda_k > 0$: en effet en exprimant e_k en fonction des ε_j on a :

$\lambda_k e_k = \varepsilon_k + \lambda_k \langle e_k | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \dots + \lambda_k \langle e_k | \varepsilon_{k-1} \rangle \varepsilon_{k-1}$ et donc $\lambda_k (e_k | \varepsilon_k) = \|\varepsilon_k\|^2 > 0$

Enfin, comme on veut $\|\varepsilon_k\|^2 = 1$, on a $\lambda_k = \frac{1}{\|e_k - \langle e_k | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_k | \varepsilon_{k-1} \rangle \varepsilon_{k-1}\|}$. On remarque, comme pour le

cas $k = 2$, que $e_k - \langle e_k | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_k | \varepsilon_{k-1} \rangle \varepsilon_{k-1} \neq 0_E$.

On a ainsi construit les ε_k de manière unique par récurrence.

Exemple 1: Dans \mathbb{R}^3 usuel, $e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Orthonormaliser la base (e_1, e_2, e_3) .

Réponse L'orthonormalisée est: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2: Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P|Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

Othonormalisée de (I, X, X^2) ? **Réponse :** $P_1 = I$ $P_2 = X$ $P_3 = \frac{X^2}{2}$

Exemple 3: Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P|Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$.

Othonormalisée de (I, X, X^2) ? **Réponse :** $P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} I$ $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X$ $P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (3X^2 - 2I)$

B ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Définition: On rappelle qu'un **espace vectoriel euclidien** est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} muni d'un produit scalaire

I) Existence d'une base orthonormale

Existence de bases orthonormales

Théorème: Soit E un e.v. euclidien. Alors E possède au moins une base orthonormale

Dem: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par application de l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt, on trouve une famille orthonormale $((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ qui est donc une base orthonormale de E .

Théorème de la base orthonormale incomplète: Dans un espace vectoriel euclidien, on peut compléter une famille orthonormale en une base orthonormale.

Dem: On a une famille orthonormale dans un espace vectoriel de dimension finie, donc c'est une famille libre de p vecteurs que l'on peut compléter en une base. On orthonormalise par Schmidt, on obtient une base orthonormale dans laquelle les p premiers vecteurs sont des vecteurs de la famille orthonormale.

II) Expressions dans une base orthonormale

Soit B une base orthonormale de E . $B = (e_1, \dots, e_n)$

Expression des coordonnées dans une base orthonormale

Proposition: Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$.

Dem: $x \in E \Rightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ donc $\langle x | e_i \rangle = \lambda_1 \langle e_1 | e_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n | e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i | e_i \rangle = \lambda_i$.

Aussi $x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$.

Expression de la norme dans une base orthonormale

Relation (ou formule) de Parseval: Français (1755-1836)

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E . Soit $x \in E$. Alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2}$.

Dem: Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$. On a $\lambda_i = \langle x | e_i \rangle$. On pose $x_i = \lambda_i e_i$. (x_i) est une famille orthogonale finie.

D'après Pythagore, $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$. Or $\sum_{i=1}^n x_i = x$ et $\|x_i\|^2 = \lambda_i^2 \langle e_i | e_i \rangle = \lambda_i^2 = \langle x | e_i \rangle^2$

Aussi, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2$

Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Proposition: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E . Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Alors, $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ou encore, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\langle x | y \rangle = {}^t X Y$.

Dem: $\langle x|y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \left\langle e_j \mid \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle$

Or $\left\langle e_j \mid \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle e_j \mid e_i \rangle$ et $\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$ Donc $\left\langle e_j \mid \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = y_j$ et $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Proposition: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Dem: $d(x,y) = \|y-x\| = \|x-y\|$ or $x-y = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i$ d'où $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

C PROJECTION ORTHOGONALE

I) Supplémentaire orthogonal

Structure d'un orthogonal.

Proposition : Soit F un sous-espace de E . Alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Dem: Soient $(x,y) \in (F^\perp)^2, (\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2. \forall a \in F, \langle x|a \rangle = \langle y|a \rangle = 0$ donc $\langle \lambda x + \beta y | a \rangle = 0$.

Ainsi $\forall (x,y) \in (F^\perp)^2, \forall (\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2, \lambda x + \beta y \in F^\perp$

Sous-espaces orthogonaux.

Théorème: Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F^\perp est un supplémentaire de F dans E .

Définition: F^\perp , l'orthogonal de F , s'appelle **supplémentaire orthogonal**.

Dem: * $F \cap F^\perp = \{x \in F / \forall y \in F, \langle x|y \rangle = 0\}$.

En particulier, si $x \in F \cap F^\perp, \langle x|x \rangle = 0$ donc $x = 0_E$.

* • Si $F = \{0_E\}$ alors $F^\perp = E$. Si $F = E$ alors $F^\perp = \{0_E\}$.

• Si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$. Soit n la dimension de F . Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de F . Montrons que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de F^\perp .

Soit $x \in E$. (l'idée suivante vient d'une analyse-synthèse) On pose : $y = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ et $z = x - y$.

On a clairement : $x = y + z, y \in F$. Reste à vérifier $z \in F^\perp$.

On constate d'abord que, d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on a, pour tout i : $\langle y | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle$ et donc $\langle z | e_i \rangle = 0$. Ainsi comme les e_i engendrent F , on a bien $z \in F^\perp$.

Donc $F \oplus F^\perp = E$.

Corollaire 1 : Si E est un espace euclidien, et F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Corollaire 2 : Si E euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E , alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Dem: $F \subset (F^\perp)^\perp$ et ils ont même dimension.

II) Projections orthogonales

On se place dans un espace préhilbertien réel E .

Définition

Définition: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **projection orthogonale sur F** le projecteur sur F de direction son supplémentaire orthogonal F^\perp .

Définition: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **symétrie orthogonale sur F** la symétrie associée au projecteur orthogonal sur F , i.e., $s = 2p_F - \text{Id}_E$

Définition: On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale d'axe un hyperplan.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace

Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F .

Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$ une base orthonormale de F . Alors $\forall x \in E$, $p(x) = \sum_{i=1}^q (x | \varepsilon_i) \varepsilon_i$

Dem: \square $p(x) \in F$ donc $p(x)$ s'écrit sous la forme $p(x) = \sum_{i=1}^q \lambda_i \varepsilon_i$.

\square $x - p(x) \in F^\perp$ donc $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $(x - p(x) | \varepsilon_i) = 0 \Rightarrow (x | \varepsilon_i) = (p(x) | \varepsilon_i) = \lambda_i$ CQFD

Exemple: La matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection orthogonale sur le plan

d'équation $x + 3y - z = 0$ est : $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Distance d'un point x à un sous-espace

Définition: Soit x un élément de E . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **distance de x à F** la valeur $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.

Remarque: Cette valeur existe car l'ensemble $\{d(x, y), y \in F\}$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} .

Théorème: La distance de x à F est atteinte une et une seule fois en la projection orthogonale de x sur F .

Dem: Soit p le projecteur orthogonal de x sur F .

$\forall y \in F$, $d(x, y)^2 = \|x - y\|^2 = \|(x - p(x)) + (p(x) - y)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2$ par Pythagore.

D'où $\forall y \in F$, $d(x, y) \geq d(x, p(x))$ avec égalité si et seulement si $y = p(x)$.

D HYPERPLANS AFFINES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

I) Vecteur normal à un hyperplan

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

Formes linéaires.

Soit f une forme linéaire sur E . * Si $f = 0$, alors : $f : E \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow \langle 0 | y \rangle$

* Si $f \neq 0$. Soit $H = \text{Ker } f$. H est un hyperplan. Soit (e_2, \dots, e_n) une base de H .

Soit $G = H^\perp$. G est une droite vectorielle: $\mathbb{R}x_0$ avec $x_0 \neq 0_E$.

On a $f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}}$ car $x_0 \notin H$ et (x_0, e_2, \dots, e_n) est une base de E . Posons $f(x_0) = \lambda$ et $a = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2} x_0$

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow \langle a | y \rangle$. φ est une forme linéaire. $\varphi(x_0) = \langle a | x_0 \rangle = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2} \langle x_0 | x_0 \rangle = \lambda = f(x_0)$.

$\forall k \geq 2, \varphi(e_k) = 0$ car $a \in H^\perp$. Ainsi, φ et f coïncident sur une base de E , donc sur E . D'où le théorème:

Théorème: Toute forme linéaire f s'écrit de manière unique sous la forme $f(y) = \langle a | y \rangle$ où $a \in E$.

Conséquence: Si H est un hyperplan vectoriel d'un espace euclidien, H est l'orthogonal d'un singleton : ces singletons constituent, avec le singleton $\{0_E\}$, une droite vectorielle orthogonale à H .

Vecteur normal

Définition: Soit \mathcal{H} un hyperplan affine d'un espace euclidien E de direction H . On appelle **vecteur normal à \mathcal{H}** tout vecteur non nul de la droite vectorielle $D = H^\perp$

Propriété: Soit \mathcal{H} un hyperplan affine d'un espace euclidien E . Soit \vec{n} un vecteur normal à \mathcal{H} . Soit A un point de \mathcal{H} . Alors on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right) = 0$

Dem: $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Leftrightarrow \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right) = 0$

Propriété: Soit \vec{n} un vecteur non nul d'un espace euclidien E . Soit A un point quelconque de E . On considère l'application f définie sur E par : $f(M) = \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right)$. Alors les lignes de niveau de f , $\mathcal{H}_\lambda = \{ M \in E \mid f(M) = \lambda \}$, sont les hyperplans de vecteur normal \vec{n} .

En particulier \mathcal{H}_0 est l'hyperplan de vecteur normal \vec{n} passant par A .

Dem: Soit D la droite passant par A et dirigée par \vec{n} . Si M est un point du plan et P sa projection orthogonale sur D , alors on a : $f(M) = f(P)$ car le vecteur \overrightarrow{PM} est orthogonal à \vec{n} .

Or $f(P) = x \|\vec{n}\|^2$ avec x tel que $\overrightarrow{AP} = x \vec{n}$.

Aussi, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(M) = \lambda \Leftrightarrow f(P) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \Leftrightarrow P = B_\lambda$ où B_λ est l'unique point tel que $\overrightarrow{AB_\lambda} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$

$\Leftrightarrow M$ appartient à l'hyperplan passant par B_λ et de vecteur normal \vec{n} .

II) Equations d'un hyperplan

Equations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal

On considère un espace euclidien E muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O \mathcal{B})$ où O est un point de E et \mathcal{B} une base orthonormale de E . Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E passe par A et de vecteur normal \vec{n} . On note (a_1, a_2, \dots, a_n) les coordonnées de \vec{n} dans la base \mathcal{B} et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de A dans le repère \mathcal{R} .

Propriété: Une équation de \mathcal{H} est $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \lambda$ où $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$

Dem: Proviens directement de la caractérisation : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Leftrightarrow \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right) = 0$

Exemple 1: Dans le plan \mathbb{R}^2 la droite passant par (4,1) et orthogonale au vecteur (2,5) a pour équation : $2x + 5y = 13$

Exemple 2: Dans l'espace \mathbb{R}^3 le plan droite passant par (4,-5, -1) et orthogonal au vecteur (1,3,-2) a pour équation : $x + 3y - 2z = -9$

Distance d'un point à un hyperplan affine

Propriété: Soit \mathcal{H} un hyperplan affine d'un espace euclidien E , passant par A et de vecteur normal unitaire \vec{n} . Soit M un point de E . Alors : $d(M, \mathcal{H}) = \left| \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right) \right|$

Dem: Soit P la projection orthogonale de M sur \mathcal{H} . On a l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{PM} = x \vec{n}$. On a : $d(M, \mathcal{H}) = PM = |x|$ et $\left(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM} \right) = \left(\vec{n} \mid \overrightarrow{PM} \right) = x$. D'où le résultat.

Exemple 1: Dans le plan \mathbb{R}^2 , si \mathcal{D} est la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et M est le point de coordonnées (x_0, y_0) , alors $d(M, \mathcal{D}) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple 2: Dans l'espace \mathbb{R}^3 , si \mathcal{P} est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et M est le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , alors $d(M, \mathcal{P}) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

III) Orientation d'un hyperplan

Orientation d'un hyperplan affine

Définition: Soit E un espace euclidien orienté de dimension p . Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E de direction H de vecteur normal \vec{n} . On oriente alors \mathcal{H} de la façon suivante : **une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$ de H est dite directe** si $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-1}, \vec{n})$ est une base directe de E .

Remarque: Un changement du choix du vecteur normal peut changer l'orientation de l'hyperplan. Ainsi en choisissant $-\vec{n}$ au lieu de \vec{n} , on inverse l'orientation de H (et donc de \mathcal{H})

E ISOMETRIES VECTORIELLES

I) Automorphisme orthogonal ou isométrie vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Définition, caractérisations

Définition: Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est une **isométrie vectorielle** sssi f conserve la norme, i.e., $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

Théorème : Soit f un endomorphisme de E . Alors **f est une isométrie vectorielle $\Leftrightarrow f$ conserve le produit scalaire : $\forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$**

Dem: Si f conserve le produit scalaire, il conserve clairement la norme euclidienne.
 Si $f \in L(E)$ conserve la norme. Soit $(x,y) \in E^2$. On a, d'après les propriétés liant norme euclidienne et produit scalaire, $(f(x)|f(y)) = \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$.

Or f est un endomorphisme qui conserve la norme euclidienne, donc :

$$(f(x)|f(y)) = \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x|y)$$

D'où $f \in L(E)$ conserve le produit scalaire

Propriété: Soit f une isométrie vectorielle sur E . Alors **f est un automorphisme de E**

Dem: Soit f une isométrie vectorielle de E .

Soit $x \in \ker(f)$. On a $\|x\|^2 = (x|x) = (f(x)|f(x)) = (0|0) = 0$. Aussi f injectif et donc, comme E est de dimension finie, f est un automorphisme...

Remarque: On appellera aussi une isométrie vectorielle " **automorphisme orthogonal**"

Exemple: Les **symétries orthogonales**, et donc les réflexions, **sont des isométries** vectorielles. Attention, les projecteurs orthogonaux ne sont pas des automorphismes orthogonaux. En effet. Soit $x \in E$. $x = y + z$ avec y et z orthogonaux. $s(x) = y - z$ et donc $\|s(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$

Théorème : caractérisation à l'aide de l'image d'une base orthonormale: Soit f un endomorphisme de E et B une base orthonormale de E . Alors:

f est une isométrie vectorielle \Leftrightarrow l'image de B par f est une base orthonormale de E

Dem: On note $B = (e_1, \dots, e_n)$, et pour tout j , $f_j = f(e_j)$. Soit $C = (f_1, \dots, f_n)$.

Si f est un automorphisme orthogonal, on a : $\forall (i,j), (f_i|f_j) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Ainsi la famille C est orthonormale donc libre. Or elle est constituée de n vecteurs de E , c'est donc une base (donc c'est une base orthonormale)

Si $f \in L(E)$ et C est une base orthonormale. Soit $(x,y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.

$$f \text{ étant linéaire, on a : } f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i \text{ et } f(y) = \sum_{i=1}^n y_i f_i.$$

En utilisant l'expression du produit scalaire dans la base orthonormale C , on a :

$$\langle f(x)|f(y) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x|y \rangle : f \text{ conserve bien le produit scalaire: c'est un automorphisme orthogonal}$$

Remarque: Si $f \in L(E)$ transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée, l'image de toute base orthonormale par f en est une.

Groupe orthogonal

Théorème : L'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E (muni de la loi \circ) est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$.

Définition : On appelle ce groupe le **groupe orthogonal de E** et on le note $O(E)$.

Dem : \checkmark Tout automorphisme orthogonal est un automorphisme : $O(E) \subset GL(E)$

\checkmark Id_E est un automorphisme orthogonal : $O(E)$ est non vide

\checkmark la composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal

\checkmark l'inverse (la bijection réciproque) d'un automorphisme orthogonal est orthogonal

D'où $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Exemple : Les symétries orthogonales et, en particulier, les réflexions sont des éléments de $O(E)$.

II) Matrice orthogonale

Matrice orthogonale

Définition : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une **matrice orthogonale** ssi ${}^tM.M = I_n$

Caractérisations des matrices orthogonales

Caractérisation à l'aide des vecteurs colonnes :

Théorème : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit C_1, C_2, \dots, C_n ses vecteurs colonnes. Alors : M est orthogonale $\Leftrightarrow (C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

Dem : On note $M = (m_{ij})$. On a : ${}^tM = (m'_{ij})$ avec $m'_{ij} = m_{ji}$.

Ainsi ${}^tM.M = C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n m'_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (C_i | C_j)$ avec C_k les vecteurs colonnes de la matrice M .

Aussi M orthogonale $\Leftrightarrow {}^tM.M = I_n \Leftrightarrow \forall (i,j), (C_i | C_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale

Caractérisation à l'aide des vecteurs lignes :

Théorème : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit L_1, L_2, \dots, L_n ses vecteurs lignes. Alors : M est orthogonale $\Leftrightarrow (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

Dem : On constate que pour une matrice carrée, ${}^tM.M = I_n \Leftrightarrow M.{}^tM = I_n$ et donc M orthogonale ssi tM l'est

Groupe orthogonal

Propriété : L'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

Définition : On l'appelle **groupe orthogonal d'ordre n** et on le note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$.

Dem : On vérifie aisément les stabilités caractérisant les sous-groupes....

Proposition : Soit E un espace euclidien, \mathcal{B} une base orthonormale de E , f un endomorphisme de E et $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

M est orthogonale ssi f est une isométrie vectorielle

Dem : On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n

$M \in O(n) \Leftrightarrow \forall (i,j), (C_i | C_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow \forall (i,j), (f(e_i) | f(e_j)) = \delta_{ij} \Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E .

III) Déterminant

Théorème : Si $M \in O(n)$ alors $\det(M) = \pm 1$

Dem : ${}^tM.M = I_n$ donc : $\det({}^tM) \det(M) = 1 \Leftrightarrow (\det(M))^2 = 1 \Leftrightarrow \det(M) = \pm 1$

Corollaire : $u \in O(E) \Rightarrow \det(u) = \pm 1$

Remarque : On n'a évidemment pas la réciproque : par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin O(2)$

Remarque : On parle de matrice orthogonale positive (resp. négative) si $\det(M) = +1$ (resp. -1). De même pour les isométrie vectorielle (on utilise aussie le terme directe ou indirecte)

Remarque : Une réflexion est une isométrie vectorielle négative (ou indirecte)

déterminant une réflexion est égal à -1 . En effet, dans une base orthonormale adaptée, la matrice

de la réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est -1

Groupe spécial orthogonal

Théorème : L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant $+1$ est un sous-groupe de $O(E)$

Définition : On appelle ce groupe le **groupe spécial orthogonal de E** et on le note $SO(E)$ (ou $O^+(E)$). On appelle **isométries vectorielles positives (ou rotations)** ses éléments

Dem : On vérifie les stabilités de sous-groupes.

Définition : On appelle **groupe spécial orthogonal (d'ordre n)** et on note $SO(n)$ (ou $O_n(\mathbb{R})$) le sous-groupe de $O(n)$ des matrices orthogonales de déterminant $+1$

Caractérisation des rotations à l'aide des images des bases orthonormales directes

Théorème : Soit E un espace euclidien orienté. Soit $r \in L(E)$. Alors:

$r \in SO(E) \Leftrightarrow$ l'image de toute BOND est une BOND \Leftrightarrow l'image d'une BOND est une BOND

Dem : $r \in SO(E) \Leftrightarrow r \in O(E)$ et $\det(r) > 0 \Leftrightarrow$ l'image d'une BON est une BON et l'image d'une base directe est directe

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien de dimension n

Théorème : Soit E un espace euclidien orienté de dimension n . Soit $F = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . Soit B et C deux BOND de E . Alors : $\det_B(F) = \det_C(F)$

Dem : $\det_B(F) = \det_B(C) \det_C(F) = \det_C(F)$ car $\det_C(B) = 1$

Définition : On appelle **produit mixte de la famille (x_1, \dots, x_n)** la valeur commune des déterminants de cette famille dans des BOND. On le note : $\text{Det}(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]$.

Remarque : Dans \mathbb{R}^3 , le produit mixte s'exprime sous la forme : $[x, y, z] = (x \wedge y) \cdot z$ parle de matrice orthogonale positive (resp. négative) si $\det(M) = +1$ (resp. -1). De même pour les isométrie vectorielle (on utilise aussie le terme directe ou indirecte)

Interprétation de la valeur absolue du produit mixte

Propriété : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace euclidien orienté \mathbb{R}^3 . Alors

$|\text{[} \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{]}|$ représente le volume du parallélépipède construit sur \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

Dem : Si les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires le produit mixte et le volume sont nuls.

Sinon, on orthonormalise la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On trouve une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) telle que :

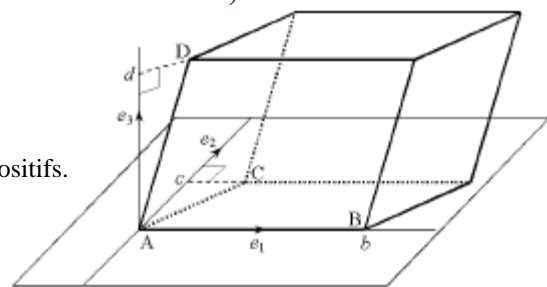
$$\vec{u} = b e_1, \quad \vec{v} = c' e_1 + c e_2 \quad \text{et} \quad \vec{w} = d'' e_1 + d' e_2 + d e_3 \quad \text{avec } b, c \text{ et } d \text{ positifs.}$$

Le produit mixte de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vaut $\pm bcd$

selon que la base (e_1, e_2, e_3) soit directe ou non.

Mais bc représente l'aire du parallélogramme de base

et d est la hauteur donc bcd est bien le volume du parallélépipède.



F ISOMETRIES VECTORIELLES DU PLAN

I) Description des matrices orthogonales de taille 2

Théorème: 1) Soit $M \in SO(2)$. Alors: $\exists! \varphi \in [0, 2\pi[\mid M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

2) Soit $M \in O(2) \setminus SO(2)$. Alors: $\exists! \varphi \in [0, 2\pi[\mid M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$

Dem: 1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. On a :

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (1), \quad c^2 + d^2 = 1 \quad (2), \quad ac + bd = 0 \quad (3) \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 \quad (4).$$

De (1), on en déduit l'existence d'un unique $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos \varphi$ et $b = \sin \varphi$.

De (2), on en déduit l'existence d'un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $c = \cos \theta$ et $d = \sin \theta$.

En remplaçant dans (3), on a $\cos(\varphi - \theta) = 0$ et donc $\exists \varepsilon \in \{-1, 1\} \mid \cos \theta = -\varepsilon \cdot \sin \varphi$ et $\sin \theta = \varepsilon \cdot \cos \varphi$. Enfin la dernière relation donne $\varepsilon = 1$

Remarque: En fait on a démontré que les matrices de $O(2)$ sont de deux types:

Soit $A \in SO(2)$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Soit $A \notin SO(2)$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$

On note $R(\varphi)$ cette matrice $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. On a $R(\varphi + \theta) = R(\varphi)R(\theta)$

On constate alors un lien entre la matrice $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ et le complexe $e^{i\varphi}$

Caractérisation des rotations à l'aide des matrices

Théorème: Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2. Soit $r \in L(E)$. Alors:

r est une rotation $\Leftrightarrow \exists! \varphi \in [0, 2\pi[\mid \forall B$ une BOND de E , $\text{Mat}_B(r) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

Dem: Soit B et C deux BOND. $\exists! \varphi \in [0, 2\pi[\mid \text{Mat}_B(r) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = R(\varphi)$.

Soit P la matrice de passage de B vers C . Comme ce sont deux BOND, P est une matrice orthogonale de déterminant positif.

Donc $\exists! \theta \in [0, 2\pi[\mid P = R(\theta)$. On a ${}^t P = P^{-1} = R(-\theta)$. Mais avec la formule de changement de bases orthonormales, on a :

$$\text{Mat}_C(r) = {}^t P \text{Mat}_B(r) P \quad \text{D'où} \quad \text{Mat}_C(r) = R(-\theta) R(\varphi) R(\theta) = R(\varphi) = \text{Mat}_B(r)$$

Théorème: Classification des isométries d'un plan euclidien orienté Soit E un plan euclidien orienté. Soit $u \in O(E)$ est soit une réflexion soit une rotation

Dem: . Soit B une BOND quelconque de E . La matrice de u dans la base B est soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \text{ soit de la forme } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas, on en déduit que u est la réflexion d'axe vect $\begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ (coordonnées exprimée dans la base B)

Dans le second cas, u est la rotation d'angle φ