MPSI 15-16 Feuille n° 25 : Espaces préhilbertiens réels

Du 26/05/16 au 09/06/16

Exercice 1. Soit p un projecteur de l'espace euclidien E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

Exercice 2. Montrer les inégalités $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geqslant \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2$

Exercice 3. Soit $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}\right)$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, orthonormalisez-la.

Exercice 4. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (A, B) \longrightarrow Tr\left({}^tA\,B\right)$ est un produit scalaire.
Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont orthogonaux.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^5$. Soit H l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Déterminez-en une base orthonormée directe

Exercice 6. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux. Est-ce une famille libre ?

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$. Soient F et G les sev donnés par les équations :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x+y &= 0\\ z+t &= 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in G \iff \begin{cases} x+y+z+t &= 0\\ x-2y+3z-4t &= 0\end{cases}$$

1. Trouver des bases orthonormées de $F^\perp$ et de $G^\perp$.
2. Ecrire les matrices des projections orthogonales sur F et sur G dans la base canonique.

Exercice 8.
1. Montrer que : $\forall u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \exists! u^* \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \left|\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle\right.$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Ecrire $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u^*)$.
3. Montrer que u est un automorphisme orthogonal si et seulement si u est inversible d'inverse u^*

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit sur $E \times E$ le produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

1. Vérifier que $\langle . \mid . \rangle$ est bien un produit scalaire
2. Appliquer l'algorithme de Schmidt à la famille libre $\left(I, X, X^2, X^3\right)$

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Déterminer la distance du point de coordonnées $(1, 1, 1)$ à la droite vectorielle $\mathscr{D} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 11. Reconnaitre les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrice :

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\3 & 4\end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\3 & -4\end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\-1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\-1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$. Déterminer, dans la base canonique, les matrices de la projection orthogonale sur $\mathscr{H}$ et de la réflexion d'axe $\mathscr{H}$

Exercice 13. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Ecrire dans cette base les matrices de :

1. la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$
2. la réflexion d'axe le plan d'équation $2x + 3y + z = 0$
3. le demi-tour autour de $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ i.e. symétrie orthogonale d'axe la droite dirigée par ce vecteur

Exercice 14. 1. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la forme suivante :
$\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1)$.
Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}$ "bien différente" de la base $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}I, \dfrac{\sqrt{6}}{6}(2X-1), \dfrac{\sqrt{3}}{3}(3X^2 - X - 1)\right)$.
Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$. Calculer ${}^tP\,P$

2. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni des formes suivantes :
$\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et $[P|Q] = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt + P(0)Q(0)$.
Montrer qu'il s'agit bien de produits scalaires et en déterminer des bases orthonormales.

Exercice 15. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$

Exercice 16. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit sur $E \times E$ le produit scalaire : $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire
2. Appliquer l'algorithme de Schmidt á la famille libre (I, X, X^2, X^3)

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire. Soient $e_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et en déterminer l'orthonormalisée de Schmidt.

Exercice 18. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^3 a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^3 b_i X^i$, on définit : $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^3 a_i b_i$.

1. Montrer que $\langle .|.\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathscr{H} = \{P \in E | P(1) = 0\}$. Montrer que $\mathscr{H}$ est un hyperplan de E et que $(I - X, X - X^2, X^3 - X^2)$ en est une base.
3. Déterminer $\mathscr{H}^\perp$ et construire une BON de $\mathscr{H}$

Exercice 19. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, former la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de :

1. la réflexion d'axe le plan d'équation : $ax + by + cz = 0$
2. la symétrie orthogonale par rapport à la droite vect $\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$

Exercice 20. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{-1}^1 \left(x^3 - (ax^2 + bx + c)\right)^2 dx\right)$ en interprétant cette expression en termes de distance.

Exercice 21. On se place dans $\mathbb{R}^4$ euclidien et on considère $F = \left(\text{vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)^\perp \bigcap \left(\text{vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)^\perp$

1. Former la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale dur F.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^4$, calculer la distance de x à F.

Exercice 22. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n^2}$. Est-ce un produit scalaire ?

Exercice 23. On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct. Trouver :

1. la droite passant par le point $(-2, 3)$ et orthogonale à la droite : $2x - 3y + 6 = 0$
2. la droite passant par le point (1,2) et orthogonale au vecteur $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
3. la droite passant par le point $(2, -3)$ et orthogonale à la droite : $y = 2x + 1$
4. les bissectrices de $D_1 : 3x + 2y - 1 = 0$ et de $D_2 : 2x - y + 2 = 0$