DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 19

PROBLEME : EXPONENTIELLE DE MATRICES – MINES 2001

Les parties B et C sont liées, mais la partie A est indépendante du reste du problème

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $M_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

PARTIE A

Soit p un entier naturel non nul. **U**ne matrice A de $M_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. **O**n note I la matrice unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note E(t) la matrice : $E(t) = I + t\,A + \frac{t^2}{2} A^2$

A.1. Vérifier la relation : $\forall\,(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ \ E(s)E(t) = E(s+t)$

A.2. En déduire que : $(E(t))^n = E(nt)$ pour $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$

A.3. Montrer que la matrice E(t) est inversible et déterminer son inverse.

A.4. Montrer que la famille (I,A,A^2) est libre dans l'espace $M_p(\mathbb{R})$

A.5. En déduire que l'application $E : t \to E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $M_p(\mathbb{R})$, est injective.

A.5. Dans cette question, p=3 et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **E**xpliciter E(t) sous la forme d'un tableau matriciel pour $t\in\mathbb{R}$.

PARTIE B

Dans cette partie, on note $B_0 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$. **O**n note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

B.1. Montrer que $F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. **D**éterminer deux vecteurs non nuls e_1 dans F et e_2 dans G. **M**ontrer que $B = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

B.2. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base B.

B.3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. **E**xpliciter P, D et P^{-1}.

B.4. Expliciter D^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et en déduire A^n sous forme d'un tableau matriciel.

PARTIE C

On reprend les notations de la partie **B** .

C.1. En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que, pour tout réel t, on a

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!}$$

C.2. Pour $t\in\mathbb{R}$, pour $n\in\mathbb{N}$, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!} A^k$

On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.

C.3. Pour $t\in\mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ avec $a(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t)$,

$b(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t)$, $c(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t)$, $d(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t)$. **E**xpliciter la matrice $E(t)$

Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3\,e^{2\,t} - 2\,e^t$

C.4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux), et les expliciter,

telles que : $\forall t\in\mathbb{R},\quad E(t) = e^{2t}\,Q + e^t\,R$

C.5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR, RQ. **Q**ue peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question **B.1.**)

C.6. En déduire que : $\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $E(s)\,E(t) = E(s+t)$.

Que peut-on dire de $(E(t))^n$ pour $n\in\mathbb{N}$? **Q**ue peut-on dire de $(E(t))^{-1}$?

L'application $E : t \to E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $M_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

PROBLEME : Exponentielle de matrice. Corrigé

Partie I

A nilpotente d'ordre 3 , $E(t) = I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2$

1. Soit $(t,s)\in\mathbb{R}^2$. On a : $E(t)\,E(s) = (I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2)\,(I + s\,A + \frac{s^2}{2}A^2)$

D'où : $E(t)\,E(s) = I + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + tA + tsA^2 + t\frac{s^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}A^2 + s\frac{t^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}\frac{s^2}{2}A^4$

Or $A^3 = A^4 = 0$, d'où $E(t)E(s) = I + (t+s)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2$ i.e. $\boxed{\mathbf{E(s)\,E(t) = E(s+t)}}$

2. Soit P_n la propriété de récurrence : " $\forall t\in\mathbb{R}, (E(t))^n = E(nt)$ "

- α P_0 est vraie car $\forall t\in\mathbb{R}$, $(E(t))^0 = I = E(0t)$
- α Si P_n est vraie. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a : $(E(t))^{n+1} = E(t)\,(E(t))^n$. Or, puisque P_n est vraie, on a $(E(t))^n = E(nt)$. Ainsi $(E(t))^{n+1} = E(t)\,E(nt) = E(t+nt)$ d'après le **1.** Ainsi P_{n+1} est vraie.

Aussi, par le théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie i.e.

$\boxed{\mathbf{\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}}$

3. On a : $\forall t\in\mathbb{R}$, $E(t)E(-t) = E(0) = I$. Ainsi $\boxed{\mathbf{E(t) \text{ inversible d'inverse } E(-t)}}$

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0_p$ (**a**).

En multipliant la relation (**a**) par A^2, on a, étant donné que $A^3 = A^4 = 0_p$, $\alpha A^2 = 0_p$

Or A n'est pas la matrice nulle, donc $\boxed{\alpha = 0_{\mathbb{R}}}$

En multipliant alors la relation (**a**) par A, on obtient $\beta A^2 = 0_p$ i.e. $\boxed{\beta = 0_{\mathbb{R}}}$

Puis en reprenant la relation (**a**) , on trouve $\boxed{\gamma = 0_{\mathbb{R}}}$.

$\boxed{\textbf{Ainsi la famille } \mathbf{(I, A, A^2)} \textbf{ est libre dans } \mathbf{M_p(\mathbb{R})}}$

5. Soit $E : \mathbb{R} \to M_p(\mathbb{R})$, $t \to E(t) = I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2$. Soit $(t,s)\in\mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$

On a : $E(t) - E(s) = 0_p$ i.e. $(t-s)A + (\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2})\,A^2 = 0_p$.

Or (A, A^2) libre donc $\underline{t = s}$.

Ainsi $\boxed{\textbf{E est une application injective}}$.

6. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ alors $\boxed{\mathbf{E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

Partie II

$B_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f \in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 2x \\ x - y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathbf{F = vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et on a (e_1) base de F

De même : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G = \ker(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = x \\ x - y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\mathbf{G = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ On pose $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et on a (e_2) base de G

F et G sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^2$ distincts donc F+G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension strictement supérieure à dim(F) = 1 donc $\boxed{\dim(F+G) = 2}$

D'autre part, $\boxed{\dim(F \cap G) = 0}$ d'après la formule de Grassmann

Aussi $\boxed{\textbf{F et G sous deux sous-espaces supplémentaires de } \mathbb{R}^2}$.

Comme (e_1) et (e_2) bases de F et G et $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{\mathbf{B = (e_1, e_2)} \textbf{ base de } \mathbb{R}^2}$

2. $e_1 \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ donc $f(e_1) = 2\,e_1$. De même $f(e_2) = e_2$. D'où : $\mathbf{mat_B\,(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

3. On pose P la matrice de passage de B_0 vers B et D = $\mathrm{mat}_B\,(f)$.

D'après la formule de changement de bases, on a $D = P^{-1} A P$ i.e. $\boxed{\mathbf{A = P\,D\,P^{-1}}}$

Ici on vérifie bien que $\boxed{\text{D est diagonale et P inversible}}$.

Remarque, on a ici $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Comme D est diagonale, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De plus, par récurrence immédiate on montre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}}}$

Partie III

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait d'après l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction $\varphi = \exp$ à l'ordre n en 0 sur l'intervalle $I = [-|t|, |t|\,]$, que, étant donné

que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(0) = 1$ et $\sup_{x \in I}|\varphi^{(n+1)}(x)| = e^{|t|}$: $\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|t|}$

Or, $|t|^n = o(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\boxed{\mathbf{e^t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!}}}$

2. $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ avec : $a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et $d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

3. D'après la question **1.**, on sait que $e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et que $e^{2t} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} (a_n(t)) = \boxed{\mathbf{a(t) = 3\,e^{2t} - 2\,e^{t}}}$

De même, $\boxed{\mathbf{b(t) = 6\,e^{t} - 6e^{2t}}}$, $\boxed{\mathbf{c(t) = e^{2t} - e^{t}}}$ et $\boxed{\mathbf{d(t) = 3\,e^{t} - 2e^{2t}}}$

D'où la matrice **E(t)** = $\begin{pmatrix} \mathbf{3e^{2t} - 2e^{t}} & \mathbf{6e^{t} - 6e^{2t}} \\ \mathbf{e^{2t} - e^{t}} & \mathbf{3e^{t} - 2e^{2t}} \end{pmatrix}$

4. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, **E(t) =** $e^{2t} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = e^{2t}\, Q + e^{t}\, R$ avec

$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. On a : $\mathbf{Q^2 = Q}$ **,** $\mathbf{R^2 = R}$ **,** $\mathbf{QR = 0_2}$ **et** $\mathbf{RQ = 0_2}$**.**

Ainsi, en notant q et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R, on a q et r deux projecteurs (car $q^2 = q$ et $r^2 = r$) associés (car $q \circ r = r \circ q = 0$ et $q + r = Id$).
De plus, en cherchant les noyaux de q et de r, on trouve Ker(q) = G et Ker(r) = F.
Ainsi $\boxed{\text{q (resp. r) est le projecteur d'axe F (resp. G) et de direction G (resp. F)}}$

6. $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{s}R)(e^{2t}Q + e^{t}R) = e^{2(t+s)}\,Q + e^{(t+s)}\,R$ car $R^2 = R$, $Q^2 = Q$ et $QR = RQ = 0$ D'où : $\boxed{\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)}$ (*)

Par récurrence (la même que dans la partie I), on montre: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}$

En utilisant la formule (*), on montre que $\boxed{\text{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$. On a :

$e^{2s}Q + e^{s}R = e^{2t}Q + e^{t}R \Leftrightarrow (e^{2s} - e^{2t})Q + (e^{s} - e^{t})R = 0_2$

Or la famille (Q,R) est libre car Q et R sont deux matrices non colinéaires, donc on a $e^{2t} = e^{2s}$ et $e^t = e^s$ i.e. $\boxed{t = s}$

Ainsi l'application $\boxed{\text{E est injective}}$