PROBLEME : Constante d'Euler et accélération de convergence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $u_n = s_n - \ln(n)$ et $v_n = s_{n-1} - \ln(n)$.

La constante d'Euler est le nombre réel : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$

1) **a) M**ontrer l'existence de γ.

b) Donner un encadrement de γ d'amplitude $^1/_{10}$.

c) Justifier la relation : $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right)$

2) **S**oit $k \in \mathbb{N}^*$, et f la fonction définie sur $[k, k+1]$ par : $f(t) = \frac{1}{t}$. On note g la fonction affine sur $[k, k+1]$ et h la fonction affine sur $[k, k + ½[$ et $[k + ½, k+1]$ telles que :

$f(k) = g(k) = h(k)$, $f(k+1) = g(k+1) = h(k+1)$, $f'(k) = h'(k)$ et $f'(k+1) = h'(k+1)$

a) Représenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en justifiant leurs positions relatives.

b) Par des considérations d'intégrales, prouver que :

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$$

c) Quelles inégalités peut-on en déduire pour $u_n - \gamma$?

3) **a) D**onner le développement limité de $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ à l'ordre 5.

b) Trouver des réels a, b et c tels que :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} c\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$$

c) Démontrer alors que : $u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{c}{n^4}$

4) **S**oit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$

a) Chercher $\text{Im}(\Phi)$ et $\ker(\Phi)$

b) **E**n déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme Q_p tel que $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(X + 1) - Q_p(X) = X^p$.

c) **D**émontrer que pour tout $p \geqslant 1$, $Q_p'(X) - Q_p'(0) = p\ Q_{p-1}(X)$

d) **C**alculer Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 .

e) **D**éterminer les minimum et maximum de Q_5 sur $[0, 1]$

f) **M**ontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le polynôme Q_p est à coefficients rationnels

5) **P**our p et k deux entiers naturels non nuls, on pose : $I_p(k) = \int_0^1 \frac{p\ Q_{p-1}(t)}{(t + k)^{p+1}}\,dt$

a) **T**rouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}

b) **C**alculer $I_1(k)$.

c) **A** l'aide de la question 4^e^), donner un encadrement de $I_6(k)$. En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$

d) **D**onner les dix premières décimales de γ

CORRIGE

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $u_n = s_n - \ln(n)$ et $v_n = s_{n-1} - \ln(n)$. La constante d'Euler est le nombre réel : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$

1) a) Montrer l'existence de γ.

On montre aisément que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$ (la courbe de la fonction $x \to \ln(1+x)$ est sous la tangente en 0). Ainsi :

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1+n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{1+n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$
- $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

On a donc établi que les deux suites sont monotones de monotonies différentes et que leur différence convergeait vers 0, ainsi les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes . En particulier, **la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge**

b) Donner un encadrement de γ d'amplitude 1/10.

Les deux suites étant adjacentes et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ croissante, on a : $\forall n \geqslant 2$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

Donc : $|u_n - \gamma| \leqslant |u_n - v_n| = \frac{1}{n}$. Ainsi on est assuré que u_n est une valeur approchée de γ à 10^{-1} lorsque $n \geqslant 10$. Or :

$v_{11} = 0{,}531$ par défaut et $u_{11} = 0{,}622$ par excès **Ainsi : $\gamma = 0{,}58$ à 5.10^{-2} près.**

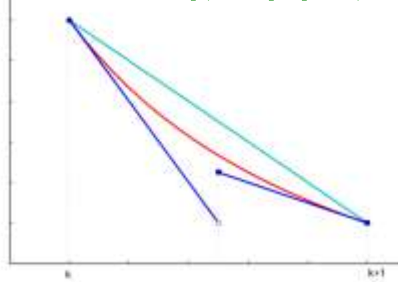
c) Justifier la relation : $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right)$

Soit $(t_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $t_1 = 1$ et, si $n \geqslant 2$, $t_n = \frac{1}{n} - (\ln(n) - \ln(n-1)) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$. On montre aisément que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$. Ainsi, γ est la somme de la série $\sum_n t_n$ i.e. $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k$. En particulier,

$\gamma - u_n$ est le reste partiel d'ordre n de la série, donc : $\mathbf{u_n - \gamma} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k = \sum_{k=n}^{+\infty} t_{k+1} = \boldsymbol{\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right)}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et f la fonction définie sur [k, k+1] par : $f(t) = \frac{1}{t}$. On note g la fonction affine sur [k, k+1] et h la fonction affine sur [k, k + ½[et [k + ½, k+1] telles que : $f(k) = g(k) = h(k)$, $f(k+1) = g(k+1) = h(k+1)$, $f'(k) = h'(k)$ et $f'(k+1) = h'(k+1)$

a) Représenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en justifiant leurs positions relatives.



$f'' > 0$ sur [k, k+1], donc f est convexe :
le graphe de f est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes
Ainsi : **$\forall x \in [k, k+1]$, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$**

b) Par des considérations d'intégrales, prouver que :
$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$

On intègre l'encadrement précédent sur [k, k+1]. Par des considérations d'aire (en particulier d'aire de trapèzes), on en déduit l'encadrement : $\boldsymbol{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}}$

c) Quelles inégalités peut-on en déduire pour $u_n - \gamma$?

On en déduit également : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$

En sommant entre n et N, on obtient : $\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{8(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right) \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(N+1)}$

Aussi en prenant la limite lorsque N tend $+\infty$, on en déduit : $\boldsymbol{\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2n}}$

On en déduit l'encadrement : $u_n - \frac{1}{2n} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}$

En prenant n = 10, on obtient, $0.576 \leqslant \gamma \leqslant 0.578$

3) **a)** Donner le développement limité de $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ à l'ordre 5.

On pose, $x = \frac{1}{k}$: x tend vers 0. Par ailleurs, $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

Mais : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ et $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)$

Ainsi : $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)$

Et donc, $\mathbf{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k^2} - \frac{2}{3k^3} + \frac{3}{4k^4} - \frac{4}{5k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)}$

b) Trouver des réels a, b et c tels que : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} c\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$

On a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$ et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$

Donc si $\mathbf{a = \frac{1}{2}}$, on a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

On a alors : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6k^3}$ et $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^3}$

Donc si $\mathbf{b = -\frac{1}{12}}$, on a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$

On a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{30k^5}$ et $\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4}{k^5}$

Donc si $\mathbf{c = \frac{1}{120}}$, on a : $\mathbf{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} c\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)}$

c) Démontrer alors que : $u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^4}$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe un entier N tel que : $\forall k \geqslant N$,

$$(c-\varepsilon)\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant (c+\varepsilon)\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$$

Pour $n \geqslant N$, en sommant les inégalités précédentes entre n et $+\infty$, on obtient :

$\frac{c-\varepsilon}{n^4} \leqslant u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \leqslant \frac{c+\varepsilon}{n^4}$ et donc : $c - \varepsilon \leqslant n^4\left(u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2}\right) \leqslant c + \varepsilon$

On en déduit donc que $n^4\left(u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2}\right)$ converge vers c, c'est-à-dire : $\mathbf{u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^4}}$

soit $\mathbf{u_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{120 n^4}}$

4) Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$

a) Chercher $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\ker(\Phi)$

On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi(X^n)$ est un polynôme de degré $n-1$. Ainsi la famille $(\Phi(X^n))_{n\geqslant 1}$ est une famille de polynômes de degré échelonné (et pour laquelle tous les degrés sont atteints).
Ainsi la famille $(\Phi(X^n))_{n\geqslant 1}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. En particulier, $\mathbf{Im(\Phi) = \mathbb{R}[X]}$

- Soit $P \in \ker(\Phi)$. Si $Q = P - P(0)$, on montre que tous les entiers sont des zéros de Q. Comme Q est un polynôme, on en déduit que Q est le polynôme nul et donc P est un polynôme constant.
- Réciproquement les polynômes constants sont clairement dans $\ker(\Phi)$.

D'où : $\mathbf{\ker(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]}$

b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme Q_p tel que $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(X+1) - Q_p(X) = X^p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. <u>Existence</u>. Comme Φ est surjective, il existe un polynôme P tel que $\Phi(P) = X^p$.
On pose $Q_p = P - P(0)$. on a alors $Q_p(0) = 0$ et $\Phi(Q_p) = \Phi(P) - P(0)\,\Phi(I) = X^p$.

<u>Unicité</u>. Soit R un autre polynôme vérifiant $R(0) = 0$ et $\Phi(R) = X^p$. On a, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R(n) = Q_p(n)$ car $R(0) = 0 = Q_p(0)$ et $Q_p(k+1) - Q_p(k) = k^p = R(k+1) - R(k)$. Ainsi Q_p et R sont deux polynômes qui coïncident une infinité de fois donc ils sont égaux.
D'où **il existe un unique polynôme Q_p tel que $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(X+1) - Q_p(X) = X^p$**

c) Démontrer que pour tout $p \geqslant 1$, $Q_p'(X) - Q_p'(0) = p\, Q_{p-1}(X)$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $Q_p(X+1) - Q_p(X) = X^p$. Donc en dérivant, on obtient : $Q_p'(X+1) - Q_p'(X) = p\, X^{p-1}$
Ainsi : $\Phi(Q_p') = p\,\Phi(Q_{p-1})$ Donc, comme $\ker(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$, il existe une constante λ telle que : $Q_p' = p\, Q_{p-1} + \lambda$
En prenant la valeur en 0, on en déduit $\lambda = Q_p'(0)$ soit $\mathbf{Q_p'(X) - Q_p'(0) = p\, Q_{p-1}(X)}$

d) Calculer $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$.

Connaissant les images des vecteurs de la base canonique, on en déduit aisément : $\mathbf{Q_0 = X}$.

Puis en intégrant la relation $Q_p' - Q_p'(0) = p\, Q_{p-1}$, on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ Q_p(x) = p\int_0^x Q_{p-1}(t)\,dt + Q_p'(0)\,x + Q_p(0)$

Or $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(1) = Q_p(0) + 0^p = 0$ si $p\in\mathbb{N}^*$. Ainsi : $Q_p'(0) = -p\int_0^1 Q_{p-1}(t)\,dt$ et donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ Q_p(x) = p\int_0^x Q_{p-1}(t)\,dt - p\,x\int_0^1 Q_{p-1}(t)\,dt$$

Ainsi : $Q_1 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \mathbf{\frac{1}{2}X(X-1)}$, $Q_2 = \frac{1}{6}(2X^3 - 3X^2 + X) = \mathbf{\frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)}$,

$Q_3 = \frac{1}{4}(X^4 - 2X^3 + X^2) = \mathbf{\frac{1}{4}X^2(X-1)^2}$, $Q_4 = \frac{1}{30}(6X^5 - 15X^4 + 10X^3 - X) = \mathbf{\frac{1}{30}X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1)}$

$Q_5 = \frac{1}{12}(2X^6 - 6X^5 + 5X^4 - X^2) = \mathbf{\frac{1}{12}X^2(X-1)^2(2X^2-2X-1)}$

e) Déterminer les minimum et maximum de Q_5 sur [0, 1]

0 étant une solution double de Q_5, on a $Q_5'(0) = 0$ et donc :

$\forall x\in\mathbb{R},\ Q_5'(x) = 5\,Q_4(x) + Q_5'(0) = 5\,Q_4(x) = \frac{x}{6}(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)$

Le trinôme du second degré $T = 3X^2 - 3X - 1$ possède 2 racines réelles mais comme les valeurs de T en 0 et 1 sont du signe opposé au coefficient dominant, 0 et 1 sont entre les racines de T, donc $T(x) < 0$ pour x dans [0, 1]. (Remarque : les racines de T sont de valeurs approchées 1.26 et – 0.26). Comme, d'autre part, $x(x-1) < 0$ sur]0,1[et s'annule en 0 et en 1, on en déduit que $Q_5'(x)$ est du signe de $2x - 1$ et s'annule en 0 et 1. On en déduit que Q_5 décroit sur [0, ½] et croit sur [½ , 1] : Q_5 est atteint son minimum en ½ et atteint son maximum en 0 ou en 1.

Aussi le minimum de Q_5 est $Q_5(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{128}$ et son maximum est $Q_5(0) = Q_5(1) = 0$

f) Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, le polynôme Q_p est à coefficients rationnels

Puisque $Q_0 = X$ est à coefficients rationnels et que : $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ Q_p(x) = p\int_0^x Q_{p-1}(t)\,dt - p\,x\int_0^1 Q_{p-1}(t)\,dt$

On montre donc aisément par récurrence que, **$\forall p\in\mathbb{N}$ Q_p est à coefficients rationnels**

5) Pour p et k deux entiers naturels non nuls, on pose : $I_p(k) = \int_0^1 \frac{p\,Q_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}}\,dt$

a) Trouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}

On transforme d'abord $p\,Q_{p-1}$ en $Q_p' - Q_p'(0)$. On a donc : $I_p(k) = \int_0^1 \frac{Q_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}\,dt - Q_p'(0)\int_0^1 \frac{1}{(t+k)^{p+1}}\,dt$

Le premier terme s'intègre par parties : $\int_0^1 \frac{Q_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}\,dt = \frac{Q_p(1)}{(1+k)^{p+1}} - \frac{Q_p(0)}{(0+k)^{p+1}} + \int_0^1 \frac{(p+1)\,Q_p(t)}{(t+k)^{p+2}}\,dt = I_{p+1}(k)$

Le second s'intègre aisément : $\int_0^1 \frac{1}{(t+k)^{p+1}}\,dt = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right)$

D'où : $I_p(k) = I_{p+1}(k) - \frac{Q_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right)$

b) Calculer $I_1(k)$.

$$I_1(k) = \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+k}\,dt - \int_0^1 \frac{k}{(t+k)^2}\,dt = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$$

c) A l'aide de la question 4°), donner un encadrement de $I_6(k)$. En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$

Puisque $\forall t\in[0,1],\ -\frac{1}{128} \leqslant Q_5(t) \leqslant 0$, on a : $-\int_0^1 \frac{6}{128\,(t+k)^7}\,dt \leqslant I_6(k) \leqslant 0$ i.e. $\mathbf{-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(k+1)^6}\right) \leqslant I_6(k) \leqslant 0}$

La relation de récurrence montrée en 5)a) et l'expression de $I_1(k)$ permet de trouver :

$$I_6(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$$

Donc : $\frac{-1}{128\,n^6} \leqslant u_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} \leqslant 0$ i.e. $\mathbf{\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{128n^6} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4}}$

Donc : $w_n = \mathbf{u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{128n^6}} = t_n$

d) Donner les dix premières décimales de γ

L'encadrement précédent est à 10^{-11} près dès que n vérifie : $128\,n^6 \geqslant 10^{11}$ c'est-à-dire $n \geqslant 31$

Or : $w_{31} = 0.577\ 215\ 664\ 897$ et $t_{31} = 0.577\ 215\ 664\ 906$ par excès donc **$\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 9$ à 6.10^{-12} près**