Devoir surveillé N$^{\text{o}}$ 11 (4 heures)

Ce devoir est constitué de plusieurs exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation.
On rappelle que la série $\sum u_n$ peut aussi être appelée la série de terme général u_n .
La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

EXERCICE I : Convergence d'une série

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\quad u_0 = 1 \quad$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}\, u_n$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.
   (b) Montrer que la série de terme général $(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est une série divergente.
   (c) En déduire la valeur de ℓ
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha\, u_{n+1}}{n^\alpha\, u_n}$
   (a) Montrer que : $\ln(v_n) = \dfrac{1}{n}\left(\alpha - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{21}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Déterminer alors α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.
   On note S la somme de cette série.
3. (a) Montrer que $u_n \sim \dfrac{e^S\, u_1}{n^{3/2}}$
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge
   (c) Montrer, à l'aide de changements d'indice dans les sommes de gauche, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$2\sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \quad + \quad 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k \quad = \quad 2\sum_{k=0}^{n} k\, u_k \quad + \quad 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$
   (d) Obtenir alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

EXERCICE II : Calculs de déterminants

1. On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{i,j} = \max(i,j)$. Calculer $\det(A)$
2. (a) Calculer $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. Calculer $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$
   (b) On pose $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ déterminant de la matrice (n,n) ayant des 5 sur la diagonale, 3 juste en dessous et 2 juste au dessus.
      i. A l'aide de développements selon des rangées, exprimer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.
      ii. En déduire D_n en fonction de n, de D_3 et D_4, puis en fonction de n seulement.

EXERCICE III : Réduction d'une matrice

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :
$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique χ_A de A défini par : $\chi_A(x) = \det(x\mathrm{I}_3 - A)$.
   (b) Montrer que A possède une et une seule valeur propre dans $\mathbb{C}$, que l'on notera a.
   (c) La matrice A est-elle inversible ?
   (d) Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre a.
2. On pose : $u_1 = e_1$, $u_2 = (f - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_1)$, $u_3 = 2e_1 + e_3$ et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f.
   (b) Ecrire la matrice T de f dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. Déterminer P^{-1}.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n puis en déduire explicitement A^n

PROBLEME I : Nombre de mots sans doublon dans un alphabet

On utilise un alphabet comportant m caractères avec $m \geqslant 2$.
On note M_m le nombre de mots que l'on peut écrire avec cet alphabet et comportant au plus une fois chaque caractère de l'alphabet (un mot comporte toujours au moins un caractère).

1. Que vaut M_5 ?
2. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ e^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$.
   En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{a^n}{n!}$
3. (a) Montrer que : $M_m = m! \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$
   (b) Ecrire une fonction Python qui calcule M_m pour un entier m choisi par l'utilisateur.
4. On fixe m. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose : $u_p = \displaystyle\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$
   (a) Montrer que u_p possède une limite L lorsque p tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que : $M_m = m!\,(e - L)$.
   (c) Vérifier que : $\forall p \geqslant m$, $\quad \dfrac{1}{m!} \leqslant \displaystyle\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{p-m} \frac{1}{(m+1)^k}$
   (d) En déduire : $\quad \dfrac{1}{m!} \leqslant L \leqslant \dfrac{1}{m!}\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)$
   (e) En déduire enfin : $1 \leqslant m!\,e - M_m \leqslant 1 + \dfrac{1}{m}$
5. Montrer que : $M_m = \left\lfloor m!\,e \right\rfloor - 1$
6. On suppose que le caractère A fait partie de l'alphabet utilisé (alphabet qui possède toujours m caractères...).
   (a) Parmi les mots dénombrés ci-dessus, combien commencent par A ?
   (b) Parmi les mots dénombrés ci-dessus, combien contiennent le caractère A ?

CORRECTION

EXERCICE I : Convergence d'une série

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}\, u_n.$

1. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge}}$. On note ℓ sa limite.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln\left(1 + \dfrac{5}{2n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3}{2n} - \dfrac{21}{8n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{3}{2n}$.
   Ainsi par comparaison à une série de Riemann divergente,
   $\boxed{\textbf{la série de terme général } (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) \textbf{ diverge}}$.

   (c) La suite $(\ln(u_0) - \ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc
   $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } \ell = 0}$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha\, u_{n+1}}{n^\alpha\, u_n}$

   (a) $\ln(v_n) = \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{5}{2n}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

   Donc $\boxed{\ln(v_n) = \left(\alpha - \dfrac{3}{2}\right)\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{21}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{1}{n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$.

   (b) En prenant $\boxed{\alpha = \dfrac{3}{2}}$, on a $\ln(v_n) \sim \dfrac{15}{8n^2}$ doonc la série de terme général $\ln(v_n)$ converge. On note S la somme de cette série.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(v_n) = \ln\left((n+1)^{3/2} u_{n+1}\right) - \ln(u_1)$. Ainsi, par continuité de la fonction exponentielle, $n^{3/2} u_n$ tend vers $^{S}\, u_1$ lorsque n tend vers $+\infty$ i.e. $\boxed{u_n \sim \dfrac{e^S\, u_1}{n^{3/2}}}$

   (b) Par comparaison à une série de Riemann convergente, $\boxed{\textbf{la série } \sum u_n \textbf{ converge}}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\Sigma = 2\sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, u_{k+1} + 3\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(2k+2)}{2k+5} u_k + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+2}{2k+5} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k^2+14k+10}{2k+5} u_k = \sum_{k=0}^{n} (2k+2) u_k$.

   Ainsi $\boxed{\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \quad + \quad 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k \quad = \quad 2\sum_{k=0}^{n} k\, u_k \quad + \quad 2\sum_{k=0}^{n} u_k}$

   (d) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, u_k$. On a : $2\left(T_n + (n+1)u_{n+1}\right) + 3\left(S_n + u_{n+1} - u_0\right) = 2T_n + 2S_n$. Ainsi $S_n = 3u_0 - 3u_{n+1} - 2(n+1)u_{n+1}$. Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3}$

EXERCICE II : Calculs de déterminants

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ en enlevant chaque ligne à la suivante. Puis en développant selon la dernière colonne et en constatant que le cofacteur du seul coefficient non nul provient d'une matrice triangulaire, on en déduit : $\boxed{\det(A) = (-1)^n n}$

2. (a) $\boxed{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 65 \text{ et } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 211}$

   (b) On pose $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

   i. En développant selon la première ligne on trouve : $\boxed{D_{n+2} = 5D_{n+1} - 6D_n}$.

   ii. A l'aide de l'expression générale des termes d'une suite récurrente linéaire double, on trouve : $\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a.3^n + b.2^n}$. Compte tenu que $D_3 = 65 = 27a + 8b$ et $D_4 = 81a + 16b = 211$, on trouve $a = 3$ et $b = -2$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3.3^n - 2.2^n}$.

EXERCICE III : Réduction d'une matrice

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

1. (a) $\chi_A(x) = \det(x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - A) = \begin{vmatrix} x+2 & -5 & -2 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -2 & 10 & x+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x-4 & -2 \\ -2 & 10 & x+5 \\ x+2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x-4 & -2 \\ 0 & 2+2x & x+1 \\ 0 & (3-x)(1+x) & 2x+2 \end{vmatrix}$

   $\boxed{\chi_A(x) = \det(x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - A) = \begin{vmatrix} x+2 & -5 & -2 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -2 & 10 & x+5 \end{vmatrix} = (x+1)^3}$.

   (b) χ_A possède une unique racine : -1. Donc $\boxed{A \text{ possède une et une seule valeur propre } a = -1}$.

   (c) 0 n'est pas une valeur propre de A donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible}}$

   (d) On note E le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   $$X \in E \iff AX = -X \iff \begin{cases} -x + 5y + 2z & = 0 \\ -x + 5y + 2z & = 0 \\ 2x - 10y - 4z & = 0 \end{cases} \iff x = 5y + 2z \iff X = y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre E. Comme il s'agit de vecteurs non colinèaires, on en déduit que $\boxed{\left(\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } E}$.

2. On pose : $u_1 = e_1 \quad , \quad u_2 = (f - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_1) \quad , \quad u_3 = 2e_1 + e_3 \quad .$

   On a donc $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

   (a) On note P la matrice de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$. On a $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. $\det(P) = -1 \neq 0$ donc P est inversible et donc $\boxed{\mathscr{C} \textbf{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
   $f(u_2) = -u_2$ donc u_2 est un vecteur propre de f. De même pour u_3.
   Ainsi $\boxed{u_2 \textbf{ et } u_3 \textbf{ sont des vecteurs propres de } f}$.

   (b) $\boxed{T = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}}$.

   (c) On a déjà vu que On a $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ était inversible. Par la méthode du pivot total, on trouve : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -5 & -2\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}}$.

   (d) On montre par récurrence immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T^n = (-1)^n \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-n & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.
   Or d'après la formule de changement de bases, on a $A = P\,T\,P^{-1}$ donc
   $\boxed{A^n = P\,T^n\,P^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix}n+1 & -1 & 2\\n & 1-5n & -2n\\-2n & 10n & 4n+1\end{pmatrix}}$

PROBLEME I : Nombre de mots sans doublon dans un alphabet

CORRECTION : Nombre de mots dans un alphabet sans répétition de lettres

On utilise un alphabet comportant m caractères ($m \geq 2$)
On note M_m le nombre de mots que l'on peut écrire avec cet alphabet et comportant au plus une fois chaque caractère de l'alphabet (un mot comporte toujours au moins un caractère).

1) Calculer M_5

Il y a $A_5^5 = 120$ mots de 5 lettres, $A_5^4 = 120$ mots de 4 lettres, $A_5^3 = 60$ mots de 3 lettres, $A_5^2 = 20$ mots de 2 lettres et enfin $A_5^1 = 5$ mots d'une seule lettre.
Donc il y a : 325 mots : **$A_5 = 325$**

2) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à toute ses dérivées successives. Ainsi en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et a, on a : $\mathbf{exp(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt}$.

On a : $\left| \exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| = \left| \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt \right| \leq \left| \int_0^a \left| \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \right| dt \right| \leq \left| \int_0^a \frac{|a|^n}{n!} e^{|a|}\, dt \right| = \frac{|a|^{n+1}}{n!} e^{|a|}$

Or, à a fixé, $|a|^{n+1} = o(n!)$ Ainsi $\frac{|a|^{n+1}}{n!} e^{|a|}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

D'où, d'après le théorême des gendarmes, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers exp(a)**

a) Montrer que : $M_m = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$

Soit E l'ensemble des mots utilisant des lettres de l'alphabet considéré sans répétition de lettres.
Soit E_k l'ensemble des mots de E ayant k lettres. Créer un mot de k lettres distinctes parmi m revient à effectuer un arrangement de k éléments (les lettres choisies) parmi m (les lettres disponibles).
Aussi : $\mathrm{card}(E_k) = A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$

Or $(E_1, E_2, ..., E_m)$ forme une partition de E, donc $\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} = m! \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m-k)!} = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$

Ainsi, **le nombre M_m de mots possibles est égal à : $M_m = \mathrm{card}(E) = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$**

b) Ecrire un algorithme qui calcule M_m pour m choisi par l'utilisateur

```
factom = 1
for k in range(1,m+1) :   factom *= k
fact, somme = 1, factom
for k in range(1,m):
        fact = fact * k
        somme = somme + factom//fact
print(somme)
```

3) On fixe m et pour p>m , on considère $u_p = \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$

a) Montrer que u_p possède une limite L lorsque p tend vers $+\infty$.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On a : $\forall p \in \mathbb{N},\ p > m \Rightarrow u_p = v_p - v_{m-1}$.

Or, on a vu dans la question 1) que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e, **donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L = e - v_{m-1}$**

b) Montrer que : $M_m = m!\,(e - L)$.

On a : $v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$, donc **$M_m = m!\, v_{m-1} = m!\,(e - L)$.**

c) Vérifier que : $\forall p \geq m,\ \frac{1}{m!} \leq \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{p-m} \frac{1}{(m+1)^k}$

☞ $\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$ est une somme de réels positifs dont un des termes est $\frac{1}{m!}$, donc $\mathbf{\frac{1}{m!} \leq \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}}$

☞ Si $k \geq m+1$, on a : $\frac{1}{k!} = \frac{1}{m!} \times \prod_{i=1}^{k-m} \frac{1}{m+i} \leq \frac{1}{m!} \times \prod_{i=1}^{k-m} \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m!} \times \left(\frac{1}{m+1}\right)^{k-m}$

De plus pour k = m, on a : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!} \times \left(\frac{1}{m+1}\right)^0$

Ainsi : $\mathbf{\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!} \times \sum_{k=m}^{p} \left(\frac{1}{m+1}\right)^{k-m} = \frac{1}{m!} \times \sum_{k=0}^{p-m} \left(\frac{1}{m+1}\right)^k}$

d) En déduire : $\frac{1}{m!} \leq L \leq \frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$

m étant fixé, $\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$ converge vers L lorsque p tend vers $+\infty$

D'autre part, $\sum_{k=0}^{p-m} \left(\frac{1}{m+1}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{p-m+1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$ car $m + 1 \neq 1$ et $\left(\frac{1}{m+1}\right)^{p-m+1}$ converge vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$

Ainsi, en passant à la limite dans l'encadrement obtenu en c), on obtient : $\mathbf{\frac{1}{m!} \leq L \leq \frac{1}{m!} \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$

e) En déduire enfin : $1 \leq m!\, e - M_m \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

Comme $L = e - \frac{M_m}{m!}$, l'encadrement du d) donne directement : $\mathbf{1 \leq m!\, e - M_m \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$

4) Montrer que : $M_m = E(m!\, e) - 1$

En transformant un peu l'encadrement précédent, on a : $M_m + 1 \leq m!\, e \leq M_m + 1 + \frac{1}{m} < (M_m + 1) + 1$ car $m > 1$

Ainsi : $M_m + 1$ est un entier (car M_m est un entier) et c'est l'entier le plus grand minorant $m!\, e$ donc il s'agit de sa partie entière : $E(m!\, e) = M_m + 1$ i.e. **$M_m = E(m!\, e) - 1$**

5) On suppose que le caractère A fait partie de l'alphabet utilisé (alphabet comportant toujours m caractères..).

a) Parmi les mots dénombrés ci-dessus, combien commencent par A ?

Créer un mot commençant par le caractère A consiste soit à considérer le mot "A" soit à justapposer à A un mot écrit avec toutes les lettres de l'alphabet sauf A. **Ainsi le nombre de mot commençant par A est : $1 + M_{m-1}$**

b) Parmi les mots dénombrés ci dessus, combien contiennent le caractère A ?

Créer un mot ne contenant pas A consiste à créer un mot avec les m –1 lettres restantes dans l'alphabet : il y en a M_{m-1}
Donc le nombre de mot contenant le caractère A est : $M_m - M_{m-1}$

CORRECTION : Nombre de mots dans un alphabet sans répétition de lettres

On utilise un alphabet comportant m caractères ($m \geq 2$)
On note M_m le nombre de mots que l'on peut écrire avec cet alphabet et comportant au plus une fois chaque caractère de l'alphabet (un mot comporte toujours au moins un caractère).

1) **C**alculer M_5

Il y a $A_5^5 = 120$ mots de 5 lettres, $A_5^4 = 120$ mots de 4 lettres, $A_5^3 = 60$ mots de 3 lettres, $A_5^2 = 20$ mots de 2 lettres et enfin $A_5^1 = 5$ mots d'une seule lettre.
Donc il y a : 325 mots : **$A_5 = 325$**

2) **M**ontrer que : $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$. **E**n déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à toute ses dérivées successives. Ainsi en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et a, on a : $\mathbf{exp(a)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$.

On a : $\left| \exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| = \left| \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt \right| \leq \left| \int_0^a \left| \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \right| dt \right| \leq \left| \int_0^a \frac{|a|^n}{n!} e^{|a|}\, dt \right| = \frac{|a|^{n+1}}{n!} e^{|a|}$

Or, à a fixé, $|a|^{n+1} = o(n!)$ Ainsi $\frac{|a|^{n+1}}{n!} e^{|a|}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

D'où, d'après le théorême des gendarmes, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers exp(a)**

a) Montrer que : $M_m = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$

Soit E l'ensemble des mots utilisant des lettres de l'alphabet considéré sans répétition de lettres.
Soit E_k l'ensemble des mots de E ayant k lettres. Créer un mot de k lettres distinctes parmi m revient à effectuer un arrangement de k éléments (les lettres choisies) parmi m (les lettres disponibles).
Aussi : $\mathrm{card}(E_k) = A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$

Or $(E_1, E_2, ..., E_m)$ forme une partition de E, donc $\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} = m! \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m-k)!} = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$

Ainsi, **le nombre M_m de mots possibles est égal à : $M_m = \mathrm{card}(E) = m! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$**

b) Ecrire un algorithme qui calcule M_m pour m choisi par l'utilisateur

```
factom = 1
for k in range(1,m+1) :   factom *= k
fact, somme = 1, factom
for k in range(1,m):
        fact = fact * k
        somme = somme + factom//fact
print(somme)
```

3) **O**n fixe m et pour p>m , on considère $u_p = \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$

a) **M**ontrer que u_p possède une limite L lorsque p tend vers $+\infty$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On a : $\forall p\in\mathbb{N}$, $p > m \Rightarrow u_p = v_p - v_{m-1}$.

Or, on a vu dans la question 1) que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e, **donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = e - v_{m-1}$**

b) Montrer que : $M_m = m!\,(e - L)$.

On a : $v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$, donc **$M_m = m!\, v_{m-1} = m!\,(e - L)$.**

c) Vérifier que : $\forall p\geq m$, $\frac{1}{m!} \leq \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{p-m} \frac{1}{(m+1)^k}$

☞ $\sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$ est une somme de réels positifs dont un des termes est $\frac{1}{m!}$, donc **$\frac{1}{m!} \leq \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{k!}$**

☞ Si $k \geq m+1$, on a : $\frac{1}{k!} = \frac{1}{m!}\times\prod_{i=1}^{k-m}\frac{1}{m+i} \leq \frac{1}{m!}\times\prod_{i=1}^{k-m}\frac{1}{m+1} = \frac{1}{m!}\times\left(\frac{1}{m+1}\right)^{k-m}$

De plus pour $k = m$, on a : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!}\times\left(\frac{1}{m+1}\right)^{0}$

Ainsi : **$\sum_{k=m}^{p}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!}\times\sum_{k=m}^{p}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{k-m} = \frac{1}{m!}\times\sum_{k=0}^{p-m}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{k}$**

d) En déduire : $\frac{1}{m!} \leq L \leq \frac{1}{m!}\left(1+\frac{1}{m}\right)$

m étant fixé, $\sum_{k=m}^{p}\frac{1}{k!}$ converge vers L lorsque p tend vers $+\infty$

D'autre part, $\sum_{k=0}^{p-m}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{k} = \frac{1-\left(\frac{1}{m+1}\right)^{p-m+1}}{1-\frac{1}{m+1}}$ car $m + 1 \neq 1$ et $\left(\frac{1}{m+1}\right)^{p-m+1}$ converge vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$

Ainsi, en passant à la limite dans l'encadrement obtenu en c), on obtient : **$\frac{1}{m!} \leq L \leq \frac{1}{m!}\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m!}\left(1+\frac{1}{m}\right)$**

e) En déduire enfin : $1 \leq m!\,e - M_m \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)$

Comme $L = e - \frac{M_m}{m!}$, l'encadrement du d) donne directement : **$1 \leq m!\,e - M_m \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)$**

4) Montrer que : $M_m = E(m!\,e) - 1$

En transformant un peu l'encadrement précédent, on a : $M_m + 1 \leq m!\,e \leq M_m + 1 + \frac{1}{m} < (M_m + 1) + 1$ car $m > 1$

Ainsi : $M_m + 1$ est un entier (car M_m est un entier) et c'est l'entier le plus grand minorant m! e donc il s'agit de sa partie entière : $E(m!\,e) = M_m + 1$ i.e. **$M_m = E(m!\,e) - 1$**

5) On suppose que le caractère A fait partie de l'alphabet utilisé (alphabet comportant toujours m caractères..).

a) Parmi les mots dénombrés ci-dessus, combien commencent par A ?

Créer un mot commençant par le caractère A consiste soit à considérer le mot "A" soit à justapposer à A un mot écrit avec toutes les lettres de l'alphabet sauf A. **Ainsi le nombre de mot commençant par A est : $1 + M_{m-1}$**

b) Parmi les mots dénombrés ci dessus, combien contiennent le caractère A ?

Créer un mot ne contenant pas A consiste à créer un mot avec les $m - 1$ lettres restantes dans l'alphabet : il y en a M_{m-1}

Donc le nombre de mot contenant le caractère A est : $M_m - M_{m-1}$