Devoir en temps libre n° 20

PROBLEME : Polynômes de Legendre

On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier n, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à n.
On note D l'application linéaire de E vers E, qui à tout polynome P associe son polynome dérivé P'.
Les puissances de D sont définies par : $D^0 = \mathrm{Id}_E$, $D^1 = D$ et $D^{k+1} = D^k \circ D$.
La valeur en t de la dérivée $k-$ième de la fonction polynome P sera donc notée $D^k(P)(t)$.
On définit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (P,Q) \in E \times E, \varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \left\langle P \middle| Q \right\rangle$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. On notera $\|P\|$ la norme euclidienne de P associée à φ.
2. (a) Etablir qu'il existe une et une seule famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$
   ** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\langle P_n \middle| X^n \right\rangle > 0$
   *** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.
   (b) Déterminer explicitement P_k pour $0 \leqslant k \leqslant 4$
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de la parité de n
3. On considère la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{1}{2^n n!} D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$ (Formule de Rodrigues)
   (a) En appliquant la formule de Leibniz à $D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right) = D^n\left((X-1)^n (X+1)^n\right)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$
   (b) Calculer, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, $D^k\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(1)$ et $D^k\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(-1)$.
   (c) Déterminer la parité de Q_n
   (d) Quel est le degré de Q_n ? En calculant le coefficient dominant de Q_n de deux manières différentes, donner une espression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.
   (e) En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer que toutes les racines de Q_n sont réelles, distinctes et appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.
   (f) Soit $S \in E$. Montrer que $\left\langle Q_n \middle| S \right\rangle = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n D^n(S)(t)dt$
   (g) Soit $S \in E$ de degré strictement inférieur à n. Que dire de $\left\langle Q_n \middle| S \right\rangle$? En déduire la valeur de $\left\langle Q_n \middle| Q_m \right\rangle$ lorsque $m \neq n$.
   (h) Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n dt$.
   Trouver, en intégrant I_n par parties, une relation liant I_n et I_{n-1}. En déduire l'expression de I_n en fonction de n. En déduire $\left\langle Q_n \middle| Q_n \right\rangle$.
   Calculer d'autre part $Q_n(1)$.

   (i) Prouver qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$. Calculer λ_n.

4. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Soit $i \leqslant n-3$. Calculer $\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_i \right\rangle$
   (b) En déduire qu'il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XQ_{n-1} = a_n Q_n + b_n Q_{n-1} + c_n Q_{n-2}$.
   (c) Etablir que $nQ_n = \alpha_n X Q_{n-1} + \beta_n Q_{n-2}$ où $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
5. (a) Etablir que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme :
   $\forall t \in \mathbb{R},\ \left(t^2-1\right) P_n''(t) + \mu_n t P_n'(t) + \nu_n P_n(t) = 0$ où $(\mu_n, \nu_n) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt$

CORRECTION : Polynômes de Legendre

On note $E=\mathbb{R}[X]$, et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$.
On note D la dérivation formelle, et le polynome dérivé de P sera noté P' ou $D(P)$.
On définit $\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (P,Q)\in E\times E, \varphi(P,Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt=\left\langle P\middle|Q\right\rangle$.

1. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de problème.
   Pour la non dégénérescence : Soit $P\in E$ tel que $\langle P|P\rangle=0$. On a $\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt=0$. P^2 est une fonction continue positive sur $[-1,1]$ dont l'intégrale sur cet intervalle est nulle, ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[-1,1]$. Ainsi P s'annule une infinité de fois sur $[-1,1]$, donc, comme il s'agit d'un polynôme, $P=0_E$. Ainsi $\boxed{\varphi=\langle .\mid .\rangle \text{ est bien un produit scalaire}}$.
2. (a) Pour établir l'existence et l'unicité d'une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant les conditions (*), (**) et (***), il suffit de montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'une famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de E vérifiant les conditions (*'), (**') et (***') suivantes :
   *' $\forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ \deg(P_k)=k$
   **' $\forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ \left\langle P_k\middle|X^k\right\rangle>0$
   ***' $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.
   Soit $n\in\mathbb{N}$. La famille $(I,X,\dots,X^n)$ est une base de E_n. D'après le théorême d'orthonormalisation de Schmidt, il existe une unique famille orthonormale de polynômes $(P_0,\dots,P_n)$ telle que $\forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ \mathrm{vect}(P_0,\dots,P_k)=\mathrm{vect}\left(I,\dots,X^k\right)$ et $\left\langle P_k\middle|X^k\right\rangle>0$. Or la première de ces conditions entraine $\forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ \deg(P_k)=k$. Ainsi, on a bien
   l'existence et l'unicité d'une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que :
   ***** $\forall n\in\mathbb{N},\ \deg(P_n)=n$ **(**)** $\forall n\in\mathbb{N},\ \left\langle P_n\middle|X^n\right\rangle>0$

   (b) L'algorithme de Schmidt à partir de la famille libre $\left(I,X,X^2,X^3,X^4\right)$ donne :
   $$\boxed{(P_0,P_1,P_2,P_3,P_4)=\left(\frac{I}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}X,\sqrt{\frac{5}{8}}\left(3X^2-1\right),\sqrt{\frac{7}{8}}\left(5X^3-3X\right),\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(35X^4-30X^2+3\right)\right)}$$

   (c) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété de récurrence "$\forall k\in[\![0,n]\!]\,, P_k$ est de la parité de k".
   ☞ $\mathscr{P}_0$ est vraie car $P_0=\dfrac{I}{\sqrt{2}}$
   ☞ Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier n. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$.
   On sait déjà que $\forall k\in[\![0,n]\!]\,, P_k$ est de la parité de k.
   Pour P_{n+1}. Il existe des scalaires $(\alpha,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+2}|\ P_{n+1}=\alpha X^{n+1}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_kP_k$.
   Soit $k\in[\![0,n]\!]$. $\left\langle P_{n+1}\middle|P_k\right\rangle=\alpha\left\langle X^{n+1}\middle|P_k\right\rangle+\lambda_k$. Or si $n+1+k$ est impair, $\left\langle X^{n+1}\middle|P_k\right\rangle=0$ car $X^{n+1}P_k$ est alors un polynôme impair. Ainsi, si $n+1+k$ est impair, $\lambda_k=0$. Ainsi $P_{n+1}=\alpha X^{n+1}+\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k+n+1\text{ pair}}}^{n}\lambda_kP_k$. Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_{n+1}\text{ est vraie}}$
   ☞ On a montré $\mathscr{P}_0$ vraie et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi par le théorême de récurrence, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie.
   En particulier $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P_n \text{ est de la parité de } n}$
3. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n=\dfrac{1}{2^nn!}D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$ (Formule de Rodrigues)
   (a) Soit $f=(X-1)^n$ et $g=(X+1)^n$. En appliquant la formule de Leibniz à $D^n(f\times g)$, on a : $D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(f)D^{n-k}(g)$.

Or $D^k(f) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}$ et $D^{n-k}(g) = \dfrac{n!}{k!}(X+1)^k$. Ainsi :

$Q_n = \dfrac{1}{2^n n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{n!}{(n-k)!}\dfrac{n!}{k!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ i.e.

$$\boxed{Q_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k}$$

(b) Calculer, pour $p \in \{1, \cdots, n-1\}$, 1 et -1 étant des zéros d'ordre n de $\left(X^2-1\right)^n$,
$\boxed{D^p\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(1) = D^p\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(-1) = 0}$.
Pour $p = n$. Dans la somme donnant $D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$, seul le terme en $k = n$ a une contribution non nulle en 1 (et en -1).
$\boxed{D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(1) = 2^n n! \quad \text{et} \quad D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(-1) = (-1)^n 2^n n!}$

(c) En remarquant que le polynôme dérivé d'un polynôme pair est un polynôme impair, que le polynôme dérivé d'un polynôme impair est un polynôme pair, et que le polynôme $\left(X^2-1\right)^n$ est pair, on montre que $\boxed{Q_n \text{ est de la parité de } n}$.

(d) Si P est un polynôme de degré p et de coefficient dominant λ et si $k \leqslant p$, la dérivée $k-$ième de P est un polynôme de degré $p-k$ et de coefficient dominant $\lambda\dfrac{p!}{(p-k)!}$. Ainsi

$$\boxed{Q_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}}.$$

Le coefficient en X^n de $Q_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$ est $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2$. Ce coefficient étant le coefficient dominant de Q_n, on a en identifiant les deux expressions de ce coefficient dominant, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}}$.

(e) Soit h_n la fonction polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie par $h_n(t) = \left(t^2-1\right)^n$. Soit $\mathscr{P}_p$ la propriété de récurrence "$h_n^{(p)}$ s'annule en p points différents dans $]-1, 1[$".

☞ $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? h_n s'annule en 1 et en -1 donc, d'après le théorème de Rolle, (possible car h_n est $\mathscr{C}^\infty$), on en déduit que h_n' possède au moins un zéro dans $]-1, 1[$. Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$

☞ Supposons que $\mathscr{P}_p$ est vraie pour un certain entier $p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrons $\mathscr{P}_{p+1}$ vraie. On sait que $h_n^{(p)}$ s'annule en p points différents de $]-1, 1[$. On note ces points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ avec $-1 < a_1 < \cdots < a_p < 1$. Or 1 et -1 sont des racines de h_n d'ordre $n > p$ donc $1 = a_0$ et $-1 = a_{p+1}$ sont également des zéros de $h_n^{(p)}$. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on trouve que $h_n^{(p+1)}$ possède $p+1$ racines distinctes dans $]-1, 1[$. Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_{p+1} \text{ est vraie}}$

☞ On a montré $\mathscr{P}_1$ vraie et, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}_p$ vraie entraine $\mathscr{P}_{p+1}$ vraie. Ainsi par le théorème de récurrence finie, on a, $\boxed{\text{pour tout } p \in [\![1, n]\!], \mathscr{P}_p \text{ vraie}}$.

En particulier $\boxed{h_n^{(n)} \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans }]-1, 1[}$.
Ainsi $Q_n = 2^n n! h_n^{(n)}$ possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Or Q_n est un polynôme de degré n : on a trouvé toutes ses racines et elles sont toutes d'ordre 1. Ainsi
$\boxed{\text{toutes les racines de } Q_n \text{ sont simples, réelles et appartiennent à l'intervalle }]-1, 1[}$.

(f) Pour f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut montrer par récurrence que

$$\int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{(n-1)}(-1)^k\left[f^{(n-1-k)}(t)g^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^n\int_{-1}^{1} f(t)\,g^{(n)}(t)dt.$$

En appliquant cette relation aux polynômes $P = \dfrac{1}{2^n n!}\left(X^2-1\right)^n$ et S, et en rappelant que les

dérivées $k-$ièmes de P s'annulent en 1 et -1 pour tout $k < n$, on en déduit :
$\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)S(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n S^{(n)}(t)dt$ i.e. $\boxed{\left\langle Q_n \middle| S\right\rangle = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n D^n(S)(t)dt}$

(g) Soit $S \in E$ de degré strictement inférieur à n. D'après la formule précédente, on a $\displaystyle\left\langle Q_n \middle| S\right\rangle = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n D^n(S)(t)dt = 0$ donc $\boxed{\left\langle Q_n \middle| S\right\rangle = 0}$.
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$. Quitte à échanger n et m, on peut supposer $m < n$. D'après le résultat précédent, on a alors : $\boxed{\textbf{si } m \neq n\textbf{, } \left\langle Q_n \middle| Q_m\right\rangle = 0}$.

(h) Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt$. Pour $n \geqslant 1$, on a, en intégrant I_n par parties :
$I_n = \displaystyle\left[t\left(t^2-1\right)^n\right]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1} t^2\left(t^2-1\right)^{n-1}dt = -2n\left(I_n + I_{n-1}\right)$. Donc
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{-2n}{2n+1}I_{n-1}}$.
Ainsi on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{-2k}{2k+1}I_0 = (-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}I_0$. Cette expression est également valable pour $n=0$, donc, comme $I_0 = 2$, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}$
A l'aide de l'expression de $\left\langle Q_n \middle| S\right\rangle$, comme $Q_n^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, on trouve donc :
$\left\langle Q_n \middle| Q_n\right\rangle = (-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}I_n$. Donc $\boxed{\left\langle Q_n \middle| Q_n\right\rangle = \frac{2}{2n+1}}$.
Par ailleurs, d'après la question 3b, $\boxed{Q_n(1) = 1}$.

(i) D'après les questions précédentes, la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \deg\left(Q_n\right) = n$.
Comme $\left\langle Q_n \middle| X^n\right\rangle = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n D^n(X^n)(t)dt = \frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt > 0$, on a par unicité de la famille $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{Q_n = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,P_n}$.

4. Soit $n \geqslant 2$.

(a) Soit $i \leqslant n-3$. On a clairement : $\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_i\right\rangle = \left\langle Q_{n-1} \middle| XQ_i\right\rangle$. Or le degré de XQ_i est strictement inférieur à $n-1$. Donc $\boxed{\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_i\right\rangle = 0}$

(b) La famille $\left(\sqrt{\dfrac{2p+1}{2}}Q_p\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n et $XQ_{n-1} \in E_n$ donc XQ_{n-1} est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, les coordonnées étant données par les produits scalaires de XQ_{n-1} par les vecteurs de la bases orthonormales. Comme les produits scalaires avec les Q_i pour $i \leqslant n-3$ sont nuls, il ne reste que des composantes selon les vecteurs Q_i pour $n-2 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi $\boxed{\exists\left(a_n, b_n, c_n\right) \in \mathbb{R}^3 \textbf{ tel que : } XQ_{n-1} = a_nQ_n + b_nQ_{n-1} + c_nQ_{n-2}}$.

(c) Pour être plus précis, les coordonnées précédentes vérifient : $a_n = \dfrac{2n+1}{2}\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_n\right\rangle$, $b_n = \dfrac{2n+1}{2}\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_{n-1}\right\rangle$ et $c_n = \dfrac{2n+1}{2}\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_{n-2}\right\rangle$.

Comme XQ_{n-1} et Q_{n-1} sont des polynômes de parité différente, $\boxed{b_n = \frac{2n+1}{2}\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_{n-1}\right\rangle = 0}$.
Ainsi $XQ_{n-1} = a_nQ_n + c_nQ_{n-2}$. En prenant la valeur en 1, on en déduit $a_n + c_n = 1$.
En considérant le coefficient en X^n, on a : $\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} = a_n\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Ainsi $a_n = \frac{n}{2n-1}$ et $c_n = \frac{n-1}{2n-1}$. Ainsi $\boxed{XQ_{n-1} = \frac{n}{2n-1}Q_n + \frac{n-1}{2n-1}Q_{n-2}}$ et donc $\boxed{n\,Q_n = (2n-1)XQ_{n-1} + (1-n)Q_{n-2}}$

5. (a) On reprend la fonction h_n définit sur $\mathbb{R}$ par $h_n(t) = \left(t^2-1\right)^n$. On a :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \left(t^2-1\right)h_n'(t) - 2nt\,h_n(t) = 0$. En dérivant cette relation $n+1$ fois, on obtient :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \left(t^2-1\right)h_n^{(n+2)}(t) + 2th_n^{(n+1)}(t) - n(n+1)h_n^{(n)}(t) = 0$.
Or il existe $\gamma_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, h_n^{(n)}(t) = \gamma_n P_n(t)$ et on a alors aussi
$\forall t \in \mathbb{R}, h_n^{(n+1)}(t) = \gamma_n P_n'(t)$ et $h_n^{(n+2)}(t) = \gamma_n P_n''(t)$.
Ainsi : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left(t^2-1\right)P_n''(t) + 2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t) = 0}$

(b) On pose f_n la fonction définie par : $f_n(t) = \left(t^2-1\right)P_n'(t)$. On a $f_n'(t) = \left(t^2-1\right)P_n''(t) + 2tP_n'(t)$.
Ainsi, d'après l'équation différentielle vérifiée par P_n, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(t) = \frac{1}{n(n+1)}f_n'(t)$.
En particulier : $\int_0^1 P_n(t)dt = \frac{1}{n(n+1)}\left(f_n(1) - f_n(0)\right) = \frac{P_n'(0)}{n(n+1)}$.
Or $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}Q_n$ et $Q_n'(0)$ vaut $\frac{n+1}{2^n}$ fois le coefficient en X^{n+1} de $\left(X^2-1\right)^n$.. Or ce coefficient est nul si n est pair et vaut $(-1)^{(n-1)/2}\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ si n est impair. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 P_n(t)dt = \frac{(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{4n+2}}{n\,2^{n+1}}\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \textbf{ si } n \textbf{ impair, et 0 si } n \textbf{ pair}}$$