

Exercice 1. Soient A , B et C trois événements d'un espace probabilisé (Ω, P) . Exprimer de manière ensembliste les événements :

1. L'un au moins des trois événements est réalisé.
2. Un et un seul des trois événements est réalisé.
3. Deux au moins des événements sont réalisés.
4. Aucun des trois événements n'est réalisé.

Exercice 2. Soient A et B deux événements d'une espace probabilisé (Ω, P) . Déterminer un encadrement de $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ dans les cas suivants :

1. $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$
2. $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

Exercice 3. Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 8 cartes (non ordonnées). Quelle est la probabilité qu'une main contienne :

1. 2 couleurs au plus ?
2. exactement un as ?
3. au moins un as ?
4. au moins un as ou un coeur ?

Exercice 4. Une urne contient 15 boules : 1 noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité que :
 - (a) le tirage soit tricolore ?
 - (b) le tirage soit unicolore ?
 - (c) le tirage comporte une noire et au moins une rouge ?
2. On tire successivement 3 boules avec remise. Quelle est la probabilité que :
 - (a) le tirage soit tricolore ?
 - (b) le tirage soit unicolore ?
 - (c) le tirage comporte une noire et au moins une rouge ?

Exercice 5. Les n pages d'un polycopié ont été dispersées par le vent, on les rassemble au hasard. Quelle est la probabilité que la page 1 et la page 2 soient côte à côte, dans le bon ordre ?

Exercice 6. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément p boules.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que le plus grand nombre tiré soit k ?
2. En déduire que
$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

Exercice 7. *Paradoxe des anniversaires* : dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leurs anniversaires le même jour (sans tenir compte des années bissextiles) ? A partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure à 0.5 ? à 0.8 ?

Exercice 8. 1. Dans une famille de 2 enfants, si l'aînée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Dans une famille de 2 enfants dont au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 9. Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On tire successivement 2 boules sans remise. Quelle est la probabilité de chacun des tirages possibles ?

Exercice 10. Une urne contient 6 boules bleues et 4 rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité du tirage "B, B, R" ?

Exercice 11. On joue avec 3 jetons : J1 a 2 faces blanches, J2 a 2 faces rouges et J3 une face blanche et une face rouge. On choisit au hasard un des jetons que l'on lance. On obtient une face rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit blanche ?

Exercice 12. On interroge les clients d'un marchand ambulant de crêpes. On leur demande s'ils sont majeurs ou pas et s'ils préfèrent la confiture ou la pâte à tartiner. 25% des personnes interrogées sont majeures. Les résultats sont les suivants :

Les mineurs sont 62% à préférer la pâte à tartiner, 17% la confiture, les autres aiment autant l'un que l'autre. Pour les majeurs, on a 28% pour la confiture et 49% pour la pâte à tartiner.

On tire une fiche-réponse au hasard. Quelle est la probabilité :

1. que le client aime autant les 2 garnitures ?
2. s'il préfère la confiture, que le client soit majeur ?

Exercice 13. Une usine fabrique des pièces identiques sur 3 machines : M_1 , M_2 et M_3 qui fournissent respectivement 50%, 30% et 20% de la production avec des défauts dans respectivement 2%, 3% et 5% des cas.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard en sortie d'usine soit défectueuse ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ? Les événements "la pièce est défectueuse" et "la pièce provient de M_1 " sont-ils indépendants ?
3. Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle proviennent de M_1 ?

Exercice 14. Une urne contient 7 boules blanches et 3 noires. On tire successivement 4 boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. (N, N, B, B) ?
2. 2 boules noires exactement ?
3. au moins une boule noire ?

Exercice 15. On joue avec une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in]0, 1[$. On lance cette pièce n fois. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir au moins une fois pile ?
2. que "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?

Exercice 16. On dispose de 2 dés. L'un est normal (6 faces numérotées de 1 à 6) et l'autre donne toujours 6. On jette un des deux dés choisi au hasard. Le résultat est 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

Exercice 17. On considère une famille de deux enfants. Déterminer la probabilité qu'il y ait deux filles sachant :

1. que l'aînée est une fille ?
2. qu'au moins l'un des enfants est une fille ?
3. qu'au moins l'un des enfants est une fille née un lundi ?
4. qu'au moins l'un des enfants est une fille et se prénomme Frédégonde ? (on remarquera que la probabilité de porter ce prénom est, devenu, très rare...)

Exercice 18. *Paradoxe de Bertrand.*

Dans un jeu télévisé, on présente trois boîtes à un candidat. Dans l'une d'entre elles (et une seule) se trouve un cadeau.

Le candidat choisit la boîte 1. Le présentateur, qui sait où est le cadeau, ouvre alors la boîte 2, qui est vide. Le candidat peut alors changer son choix, s'il le souhaite. Que doit-il faire ?

La conclusion est-elle la même si c'est le candidat qui ouvre la boîte 2 ?