MPSI 14-15 Feuille n° 27 : Variables aléatoires Du 18/06/15 au 26/06/15

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce bien équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnat le nombre de "faces" obtenues. Soit A l'événement : 'X est pair". Calculer $\mathbb{P}(X = 2k)$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$. En déduire $\mathscr{P}(A)$.

Exercice 2. On lance un dé (usuel à 6 faces) et on note X le numŕo obtenu. Puis on relance X fois le dé et on note Y le nombre d'as obtenu. Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables aléatroires X et Y sont-lles indépndantes ?

Exercice 3. On veut effectuer un test sanguin sur une population de N individus pour savoir s'ils sont porteurs d'une maladie (test positif). Cette maladie affecte chaque individu avec la probabilité p.
Pour cela, un protocole est mis en place : on regroupe la population testée en a groupes de n individus. Pour chacun des groupes, on rassemble dans une même éprouvette une goutte du sang de chaque membre. On teste mélange ; s'il est positif, on procède alors à une analyse individuelle du groupe concerné.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs. Quelle est sa loi ?
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.
Comparer cette espérance au nombre total de tests individuels sans protocole particulier dans le cas : $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0.01$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \cdots, n\}$ vérifiant : $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = a\,k(n + 1 - k)$.

1. Trouver a
2. Calculer $E(X)$
3. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$

Exercice 5. Un dé à 16 faces est pipé de telle sorte que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la probabilité de sortie de la face numéro k est double de celle d'obtenir la face numéro $k + 1$.
Déterminer la probabilité de sortie de la face numéro 1.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors d'un lancer. Calculer $E(X)$

Exercice 6. On tire n fois sur une cible avec, à chaque fois, la probablité p de l'atteindre. Un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible est atteinte. Cependant ce compteur fonctionne mal : il indique la bonne valeur avec une probabilité de $1/2$ et cette valeur $+1$ avec la probabilité $1/2$. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la cible est atteinte et Y la valeur indiquée par le compteur.
Déterminer la loi de X, celle de Y, puis les espérances de X et de Y.

Exercice 7. Un voyageur prend chaque jour le train ou la voiture. Il voyage durant n jours. Il prend un train le premier jour
Si au jour $j - 1$ il prend le train, alors la probabilité qu'il prenne la voiture au jour j est $1/2$.
Si au jour $j - 1$ il prend la voiture, alors il prend le train au jour j.
On note A_j l'événement "il prend le train au jour j" et $p_j = \mathbb{P}(A_j)$.
Exprimer p_j en fonction de p_{j-1}. Calculer p_j en fonction de j. Que vaut sa limite ?

Exercice 8. Soit X une variable alátoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y = 1 + X^2$. Calculer $E\left(X^3\right)$, $E(Y)$ et $E(XY)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement 5 cartes avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 10. Déterminer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Exercice 11.

La loi du couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par le tableau suivant. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

X \ Y	0	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.2	0

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Même question avec Y.
3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, écrire les tables des lois conditionnelles des variables $Y_{[X=i]}$ et $X_{[Y=j]}$
4. Soit $U = XY$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer les lois de U et V
5. Ecrire la table de la loi conjointe de U et V.

Exercice 12. On lance 2 dés. On note X le plus grand nombre obtenu et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$

Exercice 13. Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.
Montrer que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
Retrouver la variance d'une variable aléatoire suivant la loi de binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

Exercice 14. Un mobile se déplace de façon alátoire le long d'un axe gradué :
Il part de l'origine O. A chaque seconde, il se déplace de "+2" avec la probabilité p et de "-1" avec la probabilité $1-p$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n son abscisse à l'instant n et Y_n le nombre de "+2" effectués.

1. Donner la loi de Y_n
2. Déterminer la loi de X_n
3. Calculer $E(X_n)$ puis $E(Y_n)$