Devoir surveillé n° 5 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de deux exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Probleme

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note argth la fonction "argument tangente hyperbolique" sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Partie II : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
3. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
4. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
5. Montrer que th est solution du problème posé.

   Dans les questions **5.** à **9.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**

   On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
7. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
8. En utilisant les résultats des questions **5.** et **6.**, aboutir à une contradiction.
9. Que peut-on dire si l'hypothèse " $f(0) = 1$ " est remplacée par l'hypothèse " $f(0) = -1$ " ?

10. Conclusion ?

    Dans les questions **11.** à **14.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.

11. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **6.** à **10.**, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1.$$
    On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

12. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.

13. Montrer que g est dérivable en zéro.

14. Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

15. En déduire que g est linéaire.

16. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Exercice I : Dérivée nième

1. **Famille de polynômes**

   On définit, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par :
   $\forall t \in \mathbb{R}, P_1(t) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(t) = t^3\,P_n'(t) + (2 - 3\,n\,t^2)\ P_n(t)$

   (a) Calculer P_2, P_3 et P_4

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) = 2^n$. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, P_n est un polynôme de degré $(2n-2)$ et que le coefficient de son terme de plus haut degré vaut $(-1)^{n+1}\,(n+1)!$

2. **Etude d'une fonction**

   On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) & = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que f est continue en 0.

   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ puis dresser le tableau de variations de f en indiquant ses limites aux bornes du domaine

   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

   (d) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^6}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (f) En déduire les limites de $f^{(n)}$ en $\pm\infty$

   (g) Déterminer la limite de $f^{(n)}$ en 0

   (h) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

   (i) Déterminer une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients polynomiaux satisfaites par f

   (j) En utilisant la formule de Leibniz, en déduire une relation liant $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$ et $f^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 3$.

   (k) En déduire une relation de récurrence liant P_{n+1}, P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geqslant 3$.

Exercice II : Etude d'une fonction et d'une suite

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) & = x\,e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) & = \frac{1}{2} \end{cases}$

On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant f.

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$
2. Montrer que f est continue en 0, puis que f est continue sur $[0,+\infty[$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0, puis que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$
   (c) Montrer qu'il existe un k à déterminer tel que f soit k-lipschitzienne sur $[0,1]$.
   (d) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f
   (e) Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie II : Etude d'une suite définie de manière implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{n+1}{2n}$ d'inconnue x, admet une solution unique dans $[0,+\infty[$.
   On notera x_n cette solution
2. Donner $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ et construire x_1, x_2 et x_3 dans le graphe précédent.
3. Etudier le signe de $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite

Partie III : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = f(x) - x$. Calculer h' sur $[0,1]$ et h'' sur $]0,1]$. En déduire les variations de h' puis celles de h.
2. Montrer : $\exists! \alpha \in [0,1] \,\big|\, f(\alpha) = \alpha$.
3. Ecrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
5. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}\,|u_n - \alpha|$
6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

CORRECTION

Probleme

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction th.

1. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle.
   Pout tout réel x, $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout x, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$ et par imparité $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.
   Ainsi, th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème d'homéomorphisme, $\boxed{\text{th est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } I = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) \right[=]-1, 1[}$.
2. Le calcul précédent montre que pour tout réel x, $\boxed{\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)}$.
3. Soit x dans I. Alors $-x$ appartient à I.
   De plus, $\operatorname{th}(\operatorname{argth}(-x)) = -x$ et $\operatorname{th}(-\operatorname{argth}(x)) = -\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = -x$ car th ext impaire.
   Comme th est injective sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\operatorname{argth}(-x) = -\operatorname{argth}(x)$ donc $\boxed{\text{argth est impaire}}$
   .
4. Soit y dans I et $x = \operatorname{argth}(y)$. La fonction th est dérivable en x et $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) \neq 0$. Donc $\boxed{\text{argth est dérivable en } y}$ et $\operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{\operatorname{th}'(x)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}$. D'où, $\boxed{\operatorname{argth}'(y) = \dfrac{1}{1 - y^2}}$
5. Une décompostion en éléments simples donne pour tout x de I, $\dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$. Par intégration, qu'il existe un réel C tel que pour tout x de I, $\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) + C$.
   Or $\operatorname{th}(0) = 0$ donc $\operatorname{argth}(0) = 0$ ce qui donne $C = 0$.
   Pour tout x de I, $\boxed{\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$.

Partie II : Etude d'une équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Si il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = C$, f étant solution du problème posé, alors C vérifie $C = \dfrac{2C}{1 + C^2}$ ce qui équivaut à $C(C^2 - 1) = 0$ soit $\boxed{C = 0 \text{ ou } C = 1 \text{ ou } C = -1}$.
2. Si f est solution, $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1 + f(0)^2}$ ce qui donne comme à la question précédente $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = -1}$.
3. Pour tout réel x, $1 - |f(x)| = 1 - \dfrac{2a}{1 + a^2} = \dfrac{(1-a)^2}{1 + a^2}$ où $a = \left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
   Ainsi pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 1$ soit $\boxed{-1 \leqslant f(x) \leqslant 1}$.
4. Si f est solution. Alors, $\forall x \in \mathbb{R} : (-f)(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$ donc $\boxed{-f \text{ est aussi solution}}$.
5. Pour tout réel x :

$$\frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + (\operatorname{th}(x))^2} = \frac{2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{ch}(x))^2 + (\operatorname{sh}(x))^2} = \frac{2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}{2(\operatorname{ch}(x))^2 - 1} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 - 2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$$

ce qui montre que $\boxed{\text{th est solution du problème posé}}$.

6. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$. Or f est dérivable donc continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.
   Il en résulte que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.
7. Pour tout entier n, $u_n = f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.
   Comme pour tout n, $1+u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} et u_n ont toujours le même signe donc pour tout entier n, u_n a le signe de u_0. D'autre part pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2 - 1)}{1+u_{n+1}^2}$.
   Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) \leqslant 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$ et que $(u_{n+1} - u_n)u_{n+1} \leqslant 0$.
   Ainsi $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est décroissante et si } u_0 \leqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est croissante}}$.
8. Comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 appartient à $[-1, 1[$. Distinguons deux cas :
   Si $u_0 \geqslant 0$, alors tous les termes de la suite u sont négatifs et la suite u ne peut converger vers 1.
   Si u_0 appartient à $[0, 1[$, la suite u est décroissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ ce qui conduit à $1 < 1$.
   Contradiction.
9. On déduit des questions précédentes qu'il n'existe pas de fonctions non constantes solution du problème posé qui vérifie $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
10. S'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
    On démontre comme à la question **6.** que v converge vers $f(0) = 0$.
    Le calcul effectué à la question **7.** montre que la suite v est constante égale à $v_0 = 1$ et ne peut donc pas converger vers 0.
    De manière analogue, il est impossible qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$. Ainsi, pour tout réel x, $\boxed{-1 < f(x) < 1}$.
11. La fonction f est dérivable en 0. La fonction argth est dérivable sur $]-1, 1[$ donc en $f(0) = 0$. Par composition, $\boxed{\text{la fonction } g = \operatorname{argth} \circ f \text{ est dérivable en } 0}$.
12. En utilisant l'expression de argth trouvée au **5.**, on a pour tout réel x :

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = 2\operatorname{argth}(f(x)) = 2g(x)$$

13. Soit x réel non nul. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$. Or g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{g(u)}{u} = g'(0)$.
    Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)$.
14. Pour tout entier n, $v_n = \dfrac{g\left(2\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\dfrac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\dfrac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$ car $g(2b) = 2g(b)$ d'après la question **12.**.
    La suite v est donc constante égale à $v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$. Or elle converge vers $g'(0)$.
    Ainsi pour tout réel x non nul ,$g(x) = g'(0)x$ relation qui est encore valable pour $x = 0$: $\boxed{g \text{ est donc linéaire}}$.
15. Si f est solution du problème posé :
    ☞ Si $f(0) = 1$ d'après la question **8.**, $\boxed{f \text{ est constante égale à } 1}$.
    ☞ Si $f(0) = -1$ d'après la question **9.**, $\boxed{f \text{ est constante égale à -1}}$.
    ☞ Si $f(0) = 0$ d'après la question **15.**, il existe un réel c tel que pour tout réel x, $\operatorname{argth}(f(x)) = cx$ ce qui donne $\boxed{f(x) = \operatorname{th}(cx)}$. La question **5.** assure que les fonctions de ce type sont bien solutions.

Exercice I : Dérivée nième

1. **Famille de polynômes**
On définit, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par :
$\forall t \in \mathbb{R}, P_1(t) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(t) = t^3\, P_n'(t) + (2 - 3\,n\,t^2)\; P_n(t)$

   (a) On a : $\boxed{P_2(t) = -6\,t^2 + 4\,,\ P_3(t) = 24\,t^4 - 36\,t^2 + 8 \text{ et } P_4(t) = -120\,t^6 + 300\,t^4 - 144\,t^2 + 16}$

   (b) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "P_n est un polynôme de degré $(2n-2)$ de coefficient dominant $(-1)^{n+1}\,(n+1)!$ et vérifiant $P_n(0) = 2^n$ "
   ☞ $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a P_1 est le polynôme constant égal à 2 donc P_1 est de degré $0 = (2\times 1 - 2)$ de coefficient dominant $2 = (-1)^{1+1}\,(1+1)!$ et vérifiant $P_1(0) = 2^1$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   ☞ On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?
   On a $P_{n+1} = X^3\,P_n' + (2 - 3\,n\,X^2)\; P_n$ somme de deux polynômes de degré $2 + \deg(P_n) = 2n$. Le coefficient en X^{2n} dans P_{n+1} valant : $(2n-2) - 3n$ fois le coefficient dominant de P_n, on en déduit que P_{n+1} est bien de degré $2n$ et son coefficient dominant est : $(-1)^{n+2}\,(n+2)!$.
   Enfin $P_{n+1}(0) = 2P_n(0) = 2^{n+1}$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$
   ☞ Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$

   Ainsi : $\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } (2n-2) \text{ de coefficient dominant } (-1)^{n+1}\,(n+1)!}$
   et $\boxed{P_n(0) = 2^n}$

2. **Etude d'une fonction** Soit f : $\begin{cases} f(x) & = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$ Donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

   (b) f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$ ce qui est du signe de x. On calcule aisément $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$ et puisque $\boxed{f \text{ est paire}}$, on a la même limite en $-\infty$ On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ et donc f' possède une limite finie en 0. Or f est continue en 0 et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc, par théorême de la limite de la dérivée, $\boxed{f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0}$.

   (d) On vérifie aisément que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^6}\,e^{-\frac{1}{x^2}}}$

   (e) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$ "
   ☞ $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? A l'aide de l'expression de la dérivée de f et de P_1, on a $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   ☞ On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?
   On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$ donc $f^{(n)}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) = \frac{x^3 P_n'(x) + (2-3n\,x^2) P_n(x)}{x^{3n+3}}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$. On reconnait donc au numérateur, l'expression de P_{n+1} et on a $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$
   ☞ Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-\frac{1}{x^2}}}$

(f) En constatant que $\deg(P_n) < 3n$ et que $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tend vers 1 en $\pm\infty$, on obtient : $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0}$

(g) On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$. Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0}$

(h) Comme, pour tout n, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $k \leqslant n$, $f^{(k)}$ a une limite finie en 0, le théorème de classe $\mathscr{C}^n$ par prolongement permet d'affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{f \textbf{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \textbf{ sur } \mathbb{R}}$

(i) On a clairement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x^3\, f'(x) = 2\, f(x)}$

(j) Soit $n \geqslant 3$. En dérivant n fois cette relation et en utilisant la formule de Leibniz, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3\, f^{(n+1)}(x) + 3n\, x^2\, f^{(n)}(x) + 3n(n-1)x\, f^{(n-1)}(x) + n(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 2\, f^{(n)}(x)$ en déduire une relation liant $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$ et $f^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 3$.

(k) En remplaçant dans l'expression précédente, les $f^{(k)}$ par leur expression en fonction de P_k, on en déduit : $\boxed{P_{n+1} + (3n\, X^2 - 2)\, P_n + 3n(n-1)X^4 P_{n-1} + n(n-1)(n-2)X^6 P_{n-2} = 0}$

Exercice II : Etude d'une fonction et d'une suite $\begin{cases} f(x) &= x\, e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) &= \frac{1}{2} \end{cases}$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Par opérations algèbriques sur les limites, on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   (b) Comme $\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, on trouve : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \textbf{ possède la droite d'équation } Y = X - \tfrac{1}{2} \textbf{ pour asymptote en } +\infty}$

2. Par opérations algébriques sur les limites, on a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$. Donc $\boxed{f \textbf{ est continue en } 0}$. Par ailleurs, f est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont, donc $\boxed{f \textbf{ est continue sur } [0, +\infty[}$.

3. (a) $\boxed{f \textbf{ est dérivable sur }]0, +\infty[}$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. De plus : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{(x+1)}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}}$

   (b) Par comparaison des puissances et des exponentielles, on a $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Or f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^n$ par prolongement, $\boxed{f \textbf{ est de classe } \mathscr{C}^1 \textbf{ sur } [0, +\infty[}$

   (c) En fait f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x}}$. En particulier, f' est croissante sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], 0 = f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) = \frac{2}{e}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\boxed{f \textbf{ est } \frac{2}{e}\textbf{– lipschitzienne sur } [0, 1]}$

   (d) $\boxed{f \textbf{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[}$

Partie II : Etude d'une suite définie de manière implicite

1. f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, continue et ses limites en 0 et $+\infty$ sont respectivement $\frac{1}{2}$ et $+\infty$. Donc par théorême d'homéomorphisme,

f est une bijection de $[0,+\infty[$ vers $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ En particulier, puisque $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{n+1}{2n}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, **l'équation $f(x)=\frac{n+1}{2n}$ admet une solution unique x_n dans $[0,+\infty[$**.

2. **$f(x_1)=1, f(x_2)=\frac{3}{4}, f(x_3)=\frac{2}{3}$**
3. $f(x_{n+1})-f(x_n)=\dfrac{-1}{2n(n+1)}<0$. Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x_{n+1}<x_n$: **la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante**
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. On note la limite ℓ. En passant à la limite dans la relation $\forall n\in\mathbb{N}^*, f(x_n)=\frac{n+1}{2n}$ et en utilisant la continuité de f, on a : $f(\ell)=\frac{1}{2}$. Donc **la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0**

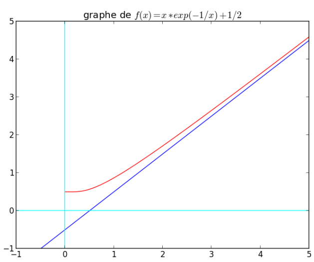
<u>Partie III : Etude d'une suite récurrente</u>

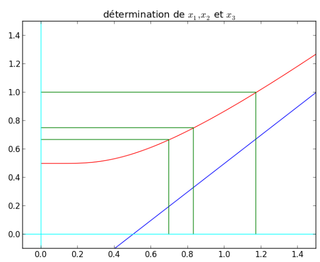
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\frac{1}{3}$ et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

1. h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ car c'est une somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On a $\forall x\in]0,1], h'(x)=\dfrac{(x+1)}{x}e^{-\frac{1}{x}}-1$ et $h''(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$. On en déduit que h' est strictement croissante sur $[0,1]$. Ainsi : $\forall x\in]0,1], h'(x)\leqslant h'(1)=\dfrac{(2)}{e}-1<0$. Ainsi **$h$ est strictement décroissante sur $[0,1]$**.
2. h est strictement décroissante et continue sur $[0,1]$ donc, par théorème d'homéomorphisme, **h est une bijection de $[0,1]$ vers $[h(1),h(0)]=\left[\dfrac{2-e}{2e},\dfrac{1}{2}\right]$**. Comme $0\in\left[\dfrac{2-e}{2e},\dfrac{1}{2}\right]$, $\exists!\alpha\in[0,1]\,|h(\alpha)=0$ i.e **$\exists!\alpha\in[0,1]\,|f(\alpha)=\alpha$**.
3.

```
>>> import numpy as np
>>> a, b = 0, 1
>>> while b - a > 0.01 :
>>>         c = (a+b)/2
>>>         if f(a)*f(c) < 0: b = c
>>>         else : a = c
>>> print(a, b)
```

4. $[0,1]$ étant stable par f, donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et on a : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$**.
5. f est $\dfrac{2}{e}$– lipschitzienne sur $[0,1]$ et $\alpha\in[0,1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, |f(u_n)-f(\alpha)|\leqslant\frac{2}{e}|u_n-\alpha|$ i.e. **$\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{e}|u_n-\alpha|$**
6. Par récurrence immédiate, on en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{2}{e}\right)^n|u_0-\alpha|$ donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α**





NOM PRENOM

Feuille à rendre avec le devoir