$\mathbb{C}$ CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Introduits par BOMBELLI (1522-1572) pour l'écriture des solutions de l'équation du troisième degré découvertes par TARTAGLIA (1500-1557) et CARDAN (1501-1576), ils permettent de résoudre des équations algébriques, interviennent dans la trigonométrie et dans la géométrie plane. Ils doivent leur écriture définitive à EULER (1707-1783).

A RAPPEL DES DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

I) Définitions

Definition: $\mathbb{C} = \{z = a + i\,b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2, i^2 = -1\}$.

Ses éléments s'appellent **les nombres complexes**

Propriété: Tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme z = a + i b avec a et b réels. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists !\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid z = a + i\,b$

Définition, notation: $a = \mathrm{Re}(z)$ est la **partie réelle** , $b = \mathrm{Im}(z)$ la **partie imaginaire**

Remarque: Les réels sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle.

Définition: On appelle **imaginaire pur** tout complexe dont la partie réelle est nulle. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble de ces imaginaires purs.

Remarque: On a une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

II) Opérations dans $\mathbb{C}$

Addition

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ d'une addition + définie par : si $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ avec a, b, a' et b' réels, alors $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$.

Cette addition est:
- ¤ **associative** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$
- ¤ **commutative** $z + z' = z' + z$
- ¤ **possède un élément neutre** $0 + z = z + 0 = z$
- ¤ **tout élément possède un symétrique (opposé):** si $z' = (-a) + i\,(-b)$ alors $z + z' = z' + z = 0$

On dit alors que $(\mathbb{C},+)$ est un **groupe commutatif** ou **abélien**. (appelé groupe additif de $\mathbb{C}$).

Multiplication

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ d'une multiplication $\times$ définie par: si $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ avec a, b, a' et b' réels $z \times z' = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b) = z\,z'$.

Cette multiplication est:
- ¤ **associative**
- ¤ **commutative**
- ¤ **distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition**:

$z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$ et $(z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$
- ¤ **possède un élément neutre** $1_{\mathbb{C}} = 1 + i\,0$
- ¤ **tout élément non nul possède un symétrique (inverse)**:

si $z = a + i\,b$ avec a et b réels et $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i\,\dfrac{-b}{a^2 + b^2}$, on a $z \times z' = z' \times z = 1$

On dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un **corps commutatif**.

III) Conjugaison

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + ib \to f(z) = a - ib$. On note $f(z) = \overline{z}$.

Définition: f est la **conjugaison** et $\overline{z}$ est le **conjugué** de z

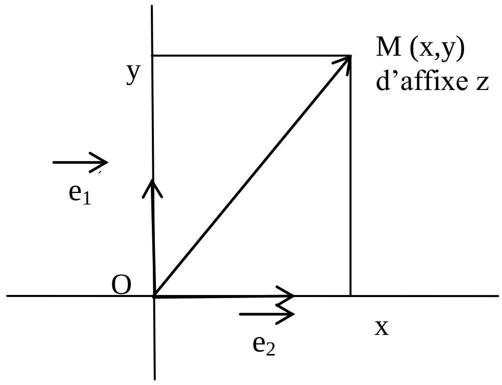
Propriétés:
(i) f **est une application involutive (i.e.** $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$**)**
(ii) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f(z) + f(z')$
(iii) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$
(iv) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = z$
(v) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = -z$
(vi) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
(vii) **On a les généralisations:** $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall p \in \mathbb{Z}$, $\overline{pz} = p\,\overline{z}$ et $\overline{z^p} = \overline{z}^{\,p}$

et $\forall (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ **et** $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

Dem: Immédiat. Laissée en exercice.

IV) Représentation géométrique des nombres complexes

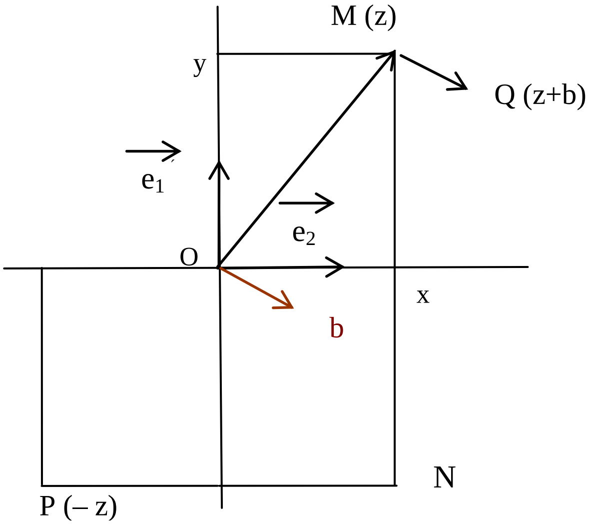
Si on se donne un repère orthonormé du plan $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points du plan sont déterminés de manière unique par leurs coordonnées (x,y) dans ce repère. On identifie ainsi les vecteurs du plan et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.



Définition: On appelle **affixe du point M de coordonnées (x,y)**, le nombre complexe z = x + i y
Réciproquement, si z est un nombre complexe, on appelle image de z le point M de coordonnées (Re(z),Im(z))

Définition: Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composante (x,y) dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{u}$, le nombre complexe z = x + i y

Interprétation de quelques opérations



Conjugaison Si M est d'affixe z, le point d'affixe $\overline{z}$ est le point N symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

Opposé Si M est d'affixe z, le point d'affixe – z est le point P symétrique de M par rapport au point O.

Addition Si M est d'affixe z, le point d'affixe z + b est l'image Q de M par la translation de vecteur le vecteur d'affixe b.

V) Module

Définition: N: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \to N(z) = \sqrt{z \times \bar{z}}$ est appelée **application module** .

Remarque: L'application est bien définie car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times \bar{z}$ est un réel positif.

Propriétés: $\forall z \in \mathbb{C}$, $|Re(z)| \leq N(z)$, $|Im(z)| \leq N(z)$, $N(\bar{z}) = N(z)$

Dem: Vient du fait que, si $z = x + i\,y$ avec x et y réels , $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

Propriété : Le module d'un produit est le produit des modules i.e.
$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $N(z.z') = N(z).N(z')$

Dem: $N(z\,z') = \sqrt{z\,z' \times \overline{z\,z'}} = \sqrt{z \times z' \times \bar{z} \times \bar{z'}} = \sqrt{z \times \bar{z} \times z' \times \bar{z'}} = \sqrt{z \times \bar{z}}\,\sqrt{z' \times \bar{z'}}$
Donc N(z z') = N'z) N(z')

Corollaire 1 : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $N(z^{-1}) = (N(z))^{-1}$

Dem: On a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, $N(\alpha) = \alpha$.

En appliquant le résultat sur le module d'un produit à $z^{-1} = \alpha\,\bar{z}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{N(z)^2} \in \mathbb{R}^+$, on a :

$N(z^{-1}) = N(\alpha)\,N(\bar{z}) = \alpha\,N(z) = \dfrac{1}{N(z)}$

Corollaire 2 : Le module d'un quotient est le quotient des modules

Dem: On regroupe la formule donnant le module d'un produit et celle donnant le module d'un inverse

Propriété : Inégalité triangulaire : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $N(z + z') \leq N(z) + N(z')$

Dem: $(N(z + z'))^2 = (z + z')\,(\overline{z + z'}) = (z + z')\,(\bar{z} + \bar{z'}) = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z'}$

Donc $(N(z + z'))^2 = (N(z))^2 + (N(z'))^2 + 2\,Re(z\,\bar{z'})$.
Or : $Re(z'') \leq N(z'')$ d'où : $(N(z + z'))^2 \leq (N(z))^2 + (N(z'))^2 + 2\,N(z)\,N(\bar{z'})$
Aussi : $(N(z + z'))^2 \leq (N(z) + N(z'))^2$. Or les termes N(z+z') et N(z) + N(z') sont des réels positifs et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $N(z + z') \leq N(z) + N(z')$

Notation définitive: Comme la fonction module que nous venons de définir et la fonction valeur absolue coïncide sur $\mathbb{R}$, on peut prolonger la notation | | et il n'y aura pas confusion entre le module et la valeur absolue pour un réel : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$

Exercice: Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$ on a: $|\,|z| - |z'|\,| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$. Etude des cas d'égalités.

Interprétation géométrique

Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan d'affixe z, | z| est la norme du vecteur $\vec{u}$.

Si A et B point d'affixe respective a et b, la distance AB est |a–b|.

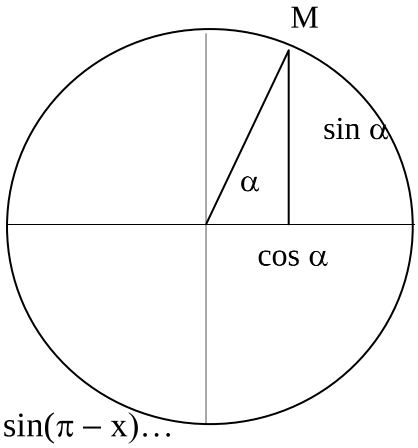
Si A est un point d'affixe a , l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-a| < R$ est le disque ouvert de centre A et de rayon R. (pour le disque fermé on remplace "<R" par "$\leq$ R")

L'inégalité triangulaire traduit simplement le fait que si $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe z et $\overrightarrow{BC}$ d'affixe z', alors la distance AC est inférieure ou égale à AB + BC

B COMPLEXES DE MODULE 1 ET TRIGONOMETRIE

I) Cercle trigonométrique

Définition: Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



Soit M un point de ce cercle trigonométrique.

On note α une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{OM}$.
Alors M a pour coordonnées (cos(α), sin(α))

Remarque: En s'aidant du cercle trigonométrique, on peut retrouver des formules "trigonométriques".

Exercice: En s'aidant du cercle trigonométrique, exprimer en fonction de cos(x) et sin(x) les expressions suivantes :
cos(x + 2π), sin(x – 4 π), cos(- x), sin(- x), sin(x + π), cos (π – x), sin(π – x)…

II) Groupe U des nombres complexes de module 1

Définition: On pose $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Sur U, la loi × est interne (le produit de deux éléments de U est un élément de U) et vérifie :
¤ elle est associative , commutative, U possède un élément neutre pour × (car $1 \in U$)
¤ tout élément de U possède un symétrique (inverse) pour la loi × car l'inverse d'un complexe de module 1 est un complexe de module 1

Aussi (U, ×) est un groupe commutatif . On l'appelle **groupe des unités de ℂ.**

Interprétation géométrique

L'ensemble U est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

III) Exponentielle imaginaire

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} \in U$ (car $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

On appelle alors **exponentielle imaginaire** l'application de ℝ vers U qui à t associe e^{it}

Propriété: On a les relations d'Euler $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ **et** $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Dem: Cela vient du fait que le conjugué de e^{it} est e^{-it} et des formules donnant les parties réelle et imaginaire d'un complexe à l'aide de son conjugué

Propriétés: (i) $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2$, $e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')}$

(ii) L'application $\mathbb{R} \to U$, $t \to e^{it}$ **est surjective** (i.e. tout élément de U est atteint par cette application)

(iii) $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2$, $e^{it} = e^{it'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid t' = t + 2k\pi \Leftrightarrow t' \equiv t\ [2\pi]$

Dem: **(i)** $e^{it} e^{it'} = (\cos t + i \sin t)(\cos t' + i \sin t')$
$= (\cos t \cos t' - \sin t \sin t') + i(\cos t \sin t' + \cos t' \sin t)$
$= \cos(t+t') + i\sin(t+t') = e^{i(t+t')}$ (les formules trigonométriques 1 et 2 étant admises)

(ii) Soit $z \in U$. On écrit $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $|z| = 1$ donc $a^2+b^2=1$.
Ainsi $a \in [-1,1]$. Aussi $\exists x \in [0,\pi] \mid a = \cos x$. On a alors sin x et b égaux ou opposés car ils ont le même carré $1 - a^2$.
S'ils sont égaux, on pose t = x, sinon on prend t = -x et on a $z = e^{it}$

(iii) $e^{it} = e^{it'} \Leftrightarrow e^{i(t-t')} = 1 \Leftrightarrow \cos(t-t') = 1$ et $\sin(t-t') = 0$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid t' - t = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid t' = t + 2k\pi$

Remarque: Les propriétés précédentes se résument dans le résultat suivant :
L'application $\mathbb{R} \to U$, $t \to e^{it}$ *est un morphisme surjectif de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$

Corollaire : Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$

Dem: On fixe t et on raisonne par récurrence sur n

IV) Arguments d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $|z| \neq 0$. On considère le complexe $\mathbf{Z} = \dfrac{z}{|z|}$. On a $\mathbf{Z} \in U$.

Définition: On appelle **argument de $z \in \mathbb{C}^*$**, tout élément de l'ensemble $\left\{t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = \mathbf{Z} = \dfrac{z}{|z|}\right\}$.

Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho = |z| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. ρ est le **module** de z et θ est un **argument** de z, et l'écriture s'appelle **forme trigonométrique** de z

Remarque: Il n'y a pas unicité de la forme trigonométrique d'un complexe non nul

Propriété: Deux arguments d'un même complexe non nul différent d'un multiple de 2π

Dem: Provient directement de la propriété précédente

Propriété: Un argument d'un produit (resp. quotient) de deux complexes non nuls z et z' est la somme (resp. différence) d'un argument de z et d'un argument de z'.

Dem: Provient directement de la propriété précédente

V) Trigonométrie

a) Formules élémentaires

Angle a+b

On a déjà utilisé deux résultats élémentaires :

1 $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

2 $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

Ces résultats seront montrés en Math Spé mais on peut les retrouver en écrivant $e^{i(a+b)} = e^{ia}\, e^{ib}$

On appelle tangente la fonction qui à t réel associe $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Remarque: tan(t) est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite (OM) et la tangente du cercle trigonométrique au point d'affixe 1

On en déduit pour a, b et a+b admettant des tangentes (i.e. non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π) :

3 $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Angle a – b En remplaçant b par – b, on obtient alors de même:

4 $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ 5 $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

et 6 $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

Angle 2a

Dans le cas où a = b on obtient les formules :

7 $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

8 $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et 9 $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

On peut alors trouver les premières formules de linéarisation à l'aide de la formule 7 :

10 $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ 11 $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$ et 12 $\sin(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$

Transformation d'un produit en somme

En effectuant 1 + 4, on obtient : **13** $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

En effectuant 4 – 1, on obtient : **14** $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

En effectuant 2 + 5, on obtient : **15** $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

Transformation d'une somme en produit

On applique les formules 13, 14 et 15 avec p = a+b et q = a–b et on trouve :

16 $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

17 $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$

18 $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

b) Linéarisation : Méthode de Fourier

Linéariser, c'est transformer un produit $\cos^p(x)\sin^q(x)$ en somme de cos et sin d'arcs multiples de x

Soit $z = e^{ix}$. On a $\bar{z} = \frac{1}{z} = e^{-ix}$ et donc $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

Ainsi : $\cos^p(x)\sin^q(x) = \frac{1}{2^{p+q}\, i^q}\left(z + \frac{1}{z}\right)^p\left(z - \frac{1}{z}\right)^q$ On développe cette formule et on regroupe les termes en z^m et $\frac{1}{z^m}$. Puis on remplace $z^m + \frac{1}{z^m}$ par $2\cos(mx)$ et $z^m - \frac{1}{z^m}$ par $2i\sin(mx)$

Exemple: $\cos(x)\sin^3(x) = \frac{1}{2^4 i^3}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 = \frac{-1}{2^4 i}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^3 - 3z + \frac{3}{z} - \frac{1}{z^3}\right)$

$= \frac{-1}{2^4 i}\left(z^4 - 3z^2 + 3 - \frac{1}{z^2} + z^2 - 3 + \frac{3}{z^2} - \frac{1}{z^4}\right) = \frac{-1}{2^4 i}\left(\left(z^4 - \frac{1}{z^4}\right) - 2\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)\right)$

D'où : $\cos(x)\sin^3(x) = \frac{1}{8}\left(2\sin(2x) - \sin(4x)\right)$

c) Expression de fonctions trigonométriques en fonction de l'angle moitié

Expression de certaines formules en θ en fonction de $\left(\frac{\theta}{2}\right)$

D'après 7 on a : **19** $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On en déduit : **20** $1 + \cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et **21** $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

D'après 8 on a : **22** $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Des formules 20 et 22, on déduit : $1 + e^{i\theta} = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

D'où **23** $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$: le complexe $1 + e^{i\theta}$ est d'argument $\theta/2$ modulo π

De même **24** $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

d) Transformation d'une somme de la forme a cos(t) + b sin(t)

Théorème: Soit $t\in\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors :
$a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$ avec A et φ module et argument du complexe a + ib

Remarque : En Physique et/ou en SI, vous rencontrerez souvent des fonctions sin ou cos à ajouter. Le "A" de la formule est appelé "amplitude" et "φ" "déphasage".

Dem: Dans l'expression $a\cos(t) + b\sin(t)$, on reconnait la partie réelle du complexe : $(\cos(t) + i\sin(t)) \times (a - ib)$. Or si A et φ sont les module et argument de a + i b, on a :
$a - ib = A e^{-i\varphi}$ Ainsi $(\cos(t) + i\sin(t)) \times (a - ib) = e^{it} \times A e^{-i\varphi} = A e^{i(t-\varphi)}$ D'où le résultat.

VI) Exponentielle complexe

Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $z = x + iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On pose $e^z = e^x e^{iy}$

Théorème: L'application $z \to e^z$ (notée également $z \to \exp(z)$ et appelée exponentielle complexe) est un morphisme surjectif de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$ c'est à dire :

*** $\exp(0) = 1$ ** $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$ *** $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$**

****** $\forall W\in\mathbb{C}^*, \exists z\in\mathbb{C} \mid W = e^z$ ***** $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \mid z' = z + 2ik\pi$**

Dem: * $\exp(0) = e^0 e^{i0} = 1$.

** $\exp(z+z') = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = (e^x e^{iy})(e^{x'} e^{iy'}) = \exp(z)\exp(z')$

*** $\exp(-z) = e^{-x} e^{-iy} = \dfrac{1}{\exp(x)}\dfrac{1}{\exp(iy)} = \dfrac{1}{\exp(z)}$

**** Tout élément de $\mathbb{C}^*$ s'écrit sous la forme $\rho e^{i\theta} = e^z$ avec $z = \ln(\rho) + i\theta$

***** $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e^{x'} e^{iy'} \Leftrightarrow e^{x-x'} e^{i(y-y')} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-x'} = 1 \\ e^{i(y-y')} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow z' \equiv z\ [2i\pi]$

Propriétés: Le module de e^z est $\exp(\mathrm{Re}(z))$ et un argument de e^z est $\mathrm{Im}(z)$

Résolution de $e^z = a$ avec $a\in\mathbb{C}^*$

D'abord remarquons que si ρ et ρ' sont deux réels strictement positifs,
$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \rho = \rho'$ et $\theta = \theta'\ [2\pi]$. Ainsi :

$e^z = a \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |a| \\ y \equiv \arg(a)\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|a| \\ y \equiv \arg(a)\ [2\pi] \end{cases}$

C APPLICATIONS ALGEBRIQUES

I) Racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit L'équation (E_n) : $z^n = 1$. C'est une équation algébrique de degré n à coefficients réels donc les racines sont réelles ou complexes conjuguées deux à deux. 0 n'étant pas solution, on peut chercher les racines sous la forme $z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

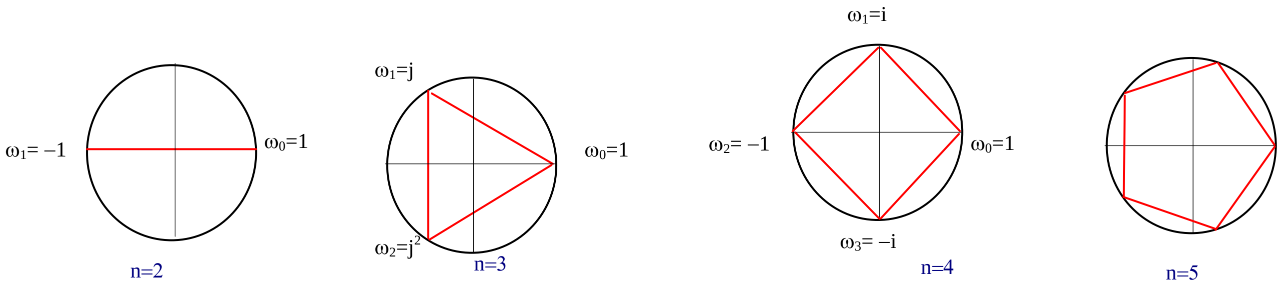
L'équation (E_n) devient alors : $\rho^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\,\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$ car $\rho>0$

Donc les solutions de (E_n) sont : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On remarque que : $z_{k'} = z_k \Leftrightarrow k' \equiv k\ [n]$

Ainsi on obtient n racines distinctes : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_k$ avec $k \in \{0,.., n-1\}$.

Les images de ces racines sont situées sur le cercle trigonométrique et forment un polygone régulier.



Propriétés: * −1 est racine n-ième de 1 ⇔ n est pair

**** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1,.., n-1\}$ et ω_k la racine n-ième de 1 d'ordre k, alors**

$$\mathbf{1 + \omega_k + \omega_k^{2} + ... + \omega_k^{n-1} = 0}$$

Dem: * $\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow 2k = n$ (car $k \in \{0,.., n-1\}$)

** $z^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^{n-1} + ... + z + 1) = 0$.

⇖ $\omega_0 = 1$ annule le premier facteur

⇖ Pour $k \in \{1,.., n-1\}$, ω_k annule le second facteur (car il n'annule pas le premier...) donc $1 + \omega_k + \omega_k^2 + ... + \omega_k^{n-1} = 0$

Cas particulier: Avec n = 3, on a la formule : $1 + j + j^2 = 0 = 1 + \overline{j} + \overline{j}^{\,2}$

Remarque: Si on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on a $U_n \subset U$ et le produit et le quotient d'éléments de U_n est encore dans U_n. On dira alors que U_n est un sous-groupe de U.

II) Applications aux équations usuelles

1) Equation $z^n = a$ (E) : racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit l'équation (E) : $z^n = a$.

⌫ Si a = 0. Alors 0 est racine d'ordre n de l'équation

⌫ Si $a \neq 0$. Supposons que l'on connaisse une racine particulière de l'équation (E) : $z_0 \neq 0$.

L'équation (E) devient : $z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid \dfrac{z}{z_0} = \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid z = \omega_k z_0$: (E) possède n solutions distinctes : les $z_k = \omega_k z_0$ où $\omega_k \in U_n$

La "difficulté" étant donc de trouver z_0 : soit algébriquement (par exemple dans le cas n = 2) soit trigonométriquement

Remarque: Si $a = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, on peut prendre $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$

2) Equation $z^2 = a$ (E) : racine carrée d'un complexe

La méthode précédente est toujours valable. Par contre, on peut vouloir obtenir l'expression algébrique des solutions.

On pose $a = \alpha + i\beta$ avec (α,β) couple de réels. on cherche une racine z sous la forme x + i y avec (x,y) réels: (E) $\Leftrightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta = a$ et $|z^2| = |a|$ (égalité des modules)

D'où (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ 2xy = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha\right) \\ \text{x y est du signe de } \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha\right)} \\ \text{x y est du signe de } \beta \end{cases}$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$

⌫ Si $\beta > 0$, on prend $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (on trouve deux solutions opposées)

⌫ Si $\beta < 0$, on prend $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ (on trouve deux solutions opposées)

⌫ Si $\beta = 0$, alors soit x soit y est nul et donc l'un des signes n'intervient pas

3) Equation du second degré : (E) $a z^2 + b z + c = 0$ avec $a \neq 0$

$a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{(2a)^2}$

Par la méthode appropriée (c.f. § précédents), on obtient une racine carrée δ de Δ (on obtient en fait deux qui sont opposées) et alors les solutions de l'équation proposée sont :

$z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$

Remarque: Le choix de δ n'influe pas sur les solutions : il ne fait qu'échanger z_1 et z_2

Remarque: La somme des racines de l'équation (E) $a z^2 + b z + c = 0$ est $\dfrac{-b}{a}$ alors que le produit vaut $\dfrac{c}{a}$

D APPLICATIONS GEOMETRIQUES

On reprend le repère orthonormé du plan $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

I) Ecriture complexe de quelques transformations

On rappelle qu'en Terminales, vous avez vu que l'application Ψ du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' est :

- Si $z' = k z$ avec k réel fixé, alors Ψ est l'homothétie de centre O et de rapport k
- Si $z' = e^{i\theta} z$ avec θ réel fixé, alors Ψ est la rotation de centre O et d'angle θ
- Si $z' = z + b$ avec b complexe fixé, alors Ψ est la translation de vecteur d'affixe b
- Si $z' = \overline{z}$, alors Ψ est la symétrie d'axe l'axe des abscisses

On en déduit la propriété suivante

Propriété: Les applications du plan d'écritures complexes $z \to z'$ sont :

i) si $z \to z' = a z$ où a complexe non nul : il s'agit de la composée de la rotation de centre O et d'angle Arg(a) et de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$

ii) si $z \to z' = a z + b$ où a complexe non nul et b complexe quelconque : il s'agit de la composée de l'application précédente et de la translation de vecteur d'affixe b. On dit que c'est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle Arg(a). Si, de plus a est différent de 1, cette similitude directe est de centre son point fixe.

Dem: Immédiat.

II) Interprétation en terme de nombres complexes de quelques notions de géométrie plane

Notion géométrique	Interprétation à l'aide des complexes
Distance	Si A est d'affixe a et B d'affixe b, $\lvert b - a\rvert$ est la distance AB.
Mesure d'angle	Si $\overrightarrow{u}$ non nul d'affixe z, alors Arg(z) est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})$ Si A, B, C sont trois points distincts 2 à 2 d'affixes respectives a, b et c, alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \operatorname{Arg}(c-a) - \operatorname{Arg}(b-a)$
Barycentre	Si $\{(A_k, \alpha_k) \mid 1 \le k \le n\}$ système de points pondérés de poids total non nul, z_k affixe de A_k et G est le barycentre de ce système, alors l'affixe de G est $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$
Alignement **Orthogonalité**	Si A, B et C sont trois points distincts 2 à 2 d'affixes respectives a, b et c, alors: 1) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ 2) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$

Exercice: Démontrer ces résultats