MPSI 15-16 Feuille n° 00 : Révisions de Terminales

Du 01/09/15 au 03/09/15

1 Complexes

Notions de conjugué, module, argument, affixe, écriture algèbrique, écriture trigonométrique (ou exponentielle), formules de Moivre et d'Euler, équations du second degré, formules trigonométriques, forme canonique.

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

1. $\begin{cases} z_1\ z_2 = 7 \\ z_1 +\ z_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} z_1\ z_2 = 5 \\ z_1 +\ z_2 = 2 \end{cases}$

Exercice 2. Module et argument de :

$$(1+i)^{19} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{13} \quad ; \quad \left(\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}\right) \quad ; \quad \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad \left(-2\sqrt{3}+2i\right)^5.$$

Exercice 3. En passant par une forme canonique, résoudre : $z^2 - (4-2i)\,z + 3 - 6i = 0$

Exercice 4. Résoudre : $\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)^2 - 6\left(\frac{z-2}{z-4i}\right) + 13 = 0$

2 Sommations, récurrence

Triangle de Pascal, coefficients binomiaux, formule du binôme, principe de récurrence, suite arithmétique, suite géomètrique

Exercice 5. En développant : $(1+1)^n\,, (1-1)^n$, calculer en fonction de n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

et

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$$

Exercice 6. Montrer que : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Exercice 7. Soit $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Montrer que $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8. Par combien de zéros se termine le nombre 2015!

Exercice 9. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \ = 1 + 2 + ... + n$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k\ )$.

Montrer que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: **a)** par récurrence **b)** en calculant $S_n + T_n$

Exercice 10. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$: **a)** par récurrence **b)** en calculant $q\ S_n - S_n$

3 Dérivation, intégration

Formules de dérivation des produits, quotients et composées, intégration par parties, primitives et dérivées des fonctions usuelles.

Exercice 11. Déterminer la dérivée $n-$ ième de la fonction :
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{1}{1+x}$

Exercice 12. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire I_5

Exercice 13. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos(x) dx$. Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n. En déduire I_5

Exercice 14. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant e^x \leqslant 1 + x + x^2$

Exercice 15. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$