Exercice 1. Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Indications 1. Pour se "débarrasser" d'un dénominateur, on peut utiliser l'écriture : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Exercice 2. Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i}\quad;\quad\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\quad;\quad\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 3. Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indications 3. Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connait $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 4. Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes : $z_1=i,\quad z_2=1+i,\quad z_3=-2+2i,\quad z_4=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 5. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$, $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}},\ \frac{1}{(1+2i)(3-i)},\ \frac{1+2i}{1-2i},\ \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 6.
1. Mettre sous forme trigo. les complexes suivants : $z_1=3+3i$, $z_2=-1-\sqrt{3}i$, $z_3=-\dfrac{4}{3}i$, $z_4=-2$, $z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.
2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

Exercice 7. Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Correction 7. $9-7i\,;\qquad -6i\,;\qquad -0{,}3+1{,}1i\,;\qquad -\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Exercice 8. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1 + i(1 + \sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

Correction 8. $\rho = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; $\rho = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; $\rho = 1$, $\theta = 2\varphi + \pi$.

Exercice 9. Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1 + i \quad ; \quad 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3} + i \quad ; \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}.$$

Exercice 10. Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)-i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 11. On rappelle la formule ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. Etablir les formules d'Euler ($\theta \in \mathbb{R}$) :
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$
2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer de produit en somme) (a, $b \in \mathbb{R}$) :
$$2\cos a\cos b \quad ; \quad 2\sin a\sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$
3. A l'aide de la formule : $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ (x, $y \in \mathbb{R}$), retrouver celles pour $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sinus, cosinus et tangente de x ou de y ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ (x, $y \in \mathbb{R}$).
4. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ ($x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$).
5. Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
6. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 12. 1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des lignes trigonométriques de l'angle θ.

2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de θ.

Exercice 13. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indications 13. Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.