MPSI 15-16 Feuille n° 01 : Nombres complexes

Du 01/09/15 au 10/09/15

Exercice 1. Mettre sous forme trigonométrique :

$$(1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^n \quad ; \quad \left(\frac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1+\cos(\beta)+i\sin(\beta)}\right)^n$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

1. $(1+i)z^2-(5+11i)z+26i=0$.
2. $z^6=(z-1)^6$.
3. $z^4-30z^2+289=0$.
4. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0$.
5. $z^2+(1-2i)z-2i=0$.

Exercice 3. Choisir les complexes u et v pour que $\frac{u+v}{1+uv}$, $i\frac{u-v}{1+uv}$ et $\frac{1-uv}{1+uv}$ soient simultanément réels ?

Exercice 4. Module et argument de : $(1-i)^{11}$; $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$; $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)$; $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$; $\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 5. Montrer que : $1+\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{\tan(2x)}{\tan(x)}$. En déduire une expression de : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos\left(2^k x\right)}\right)$

Exercice 6. Rechercher les couples de complexes (z_1,z_2) tels que $\begin{cases} z_1\ z_2=\frac{1}{2} \\ z_1+2\ z_2=\sqrt{3} \end{cases}$

Exercice 7. Trouver l'ensemble des points d'affixe z telle que i, z et iz soient les affixes de points alignés

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+2i)^n+(z-2i)^n=0$

Exercice 9. Développer $\left(1+\sqrt{3}\ i\right)\ (1+i)$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 10. Résoudre : $z^7+\binom{7}{2}z^5+\binom{7}{4}z^3+\binom{7}{6}z=0$

Exercice 11. Montrer que si $|z|=1$ et $|t|=1$ avec $z\times t\neq -1$ alors $\frac{z+t}{1+zt}\in\mathbb{R}$

Exercice 12. Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que l'on a :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$$

. Interpréter géométriquement cette relation.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2-(1-2i)z++-7i=0$.
2. $(4+2i)z^2-(7-i)z=1+3i$.
3. $z^4+(3-6i)z^2+2(16-63i)=0$.

4. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$.
5. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.
6. $(i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i = 0$ sachant qu'il y a une solution imaginaire pure.
7. $z^4 - 4(i+1)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$ sachant qu'il y a des solutions dans $\mathbb{R} \bigcup i\mathbb{R}$.

Exercice 14. 1. Résoudre : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

2. En déduire les tangentes des nombres $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ puis celle de $\frac{\pi}{10}$.

Exercice 15. Linéariser : $\cos^6 x \quad ; \quad \sin^5 x \quad ; \quad \sin^7 x \quad ; \quad \cos^3 x \sin^3 x \quad ; \quad \cos^3 x \sin^4 x$

Exercice 16. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Indications 16. Résoudre l'équation $\cos(5x) = 0$

Exercice 17. Soient $(u, v, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $z = u + iv$. Montrer que :

$$\Big((u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \ z = 0 \Big) \Longleftrightarrow |z|^2 = u^2 + v^2$$

.

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes :

1. $\begin{cases} z_1 \ z_2 = 7 \\ z_1 + \ z_2 = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1 \ z_2 = 5 \\ z_1 + \ z_2 = 2 \end{cases}$

Exercice 19. Résoudre : $\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)^2 - 6\left(\frac{z-2}{z-4i}\right) + 13 = 0$

Exercice 20. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\cos(2x)$
2. $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

Exercice 21. Discuter selon les valeurs de a l'existence de solutions de l'équation : $a\cos(x) - 2\sin(x) = a + 1$

Exercice 22. On échange les 2 aiguilles d'une horloge. La position de ces aiguilles ne correspondent pas toujours à une véritable heure. Par exemple il n'est pas possible d'avoir la grande aiguille sur le 4 et la petite sur le 12. Déterminer le nombre de positions des aiguilles de cette horloge trafiquée qui correspondent à une position correcte pour une horloge usuelle