Devoir en temps libre n° 1

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Simplification d'une somme de cosinus liés à $\dfrac{\pi}{17}$

1. On désigne dans cette question par a et h deux réels, et par n un élément de $\mathbb{N}^*$ On pose :
   $C(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\cos(a+kh))$ et $S(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\sin(a+kh))$
   (a) En formant $T(a,h) = C(a,h) + iS(a,h)$, écrire $T(a,h)$ comme somme des premiers termes d'une certaine suite géométrique.
   (b) On suppose que $\sin\dfrac{h}{2} = 0$. Calculer $T(a,h)$, puis $C(a,h)$ et $S(a,h)$, en fonction de a et de n.
   (c) On suppose que $\sin\dfrac{h}{2} \neq 0$. Donner une expression simplifiée de $T(a,h)$ puis démontrer que :
   $$C(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad S(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$
2. Dans cette question, et jusqu'à la fin du problème, θ désigne, pour alléger les notations, le réel $\dfrac{\pi}{17}$ et on ne demande pas le calcul des valeurs approchées des radicaux. On pose :
   $$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta) \text{ et } x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$
   (a) Montrer que $x_1 > 0$
   (b) Calculer $x_1 + x_2$ à l'aide de la question 1) (on trouvera un rationnel très simple).
   (c) Calculer $x_1 \times x_2$ (on pourra développer ce produit et utiliser les méthodes de linéarisation pour montrer que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$) .
   (d) Déduire de ce qui précède, des expressions de x_1 et x_2 par radicaux carrés (i.e. avec le symbole $\sqrt{\ }$) .

PROBLEME II : Racines 11^{e} de l'unité

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^n = 1 \right\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   (a) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe commutatif (les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont supposées connues) .
   (b) Déterminer les éléments de U_n. Montrer que leur somme est nulle.
2. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$
   (a) Montrer, sans calculs, que S et T sont conjugués $\left(\text{utiliser } u^{11} = 1 \text{ et que } \overline{u} = \dfrac{1}{u}\right)$.
   (b) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique) .
   (c) Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$. En déduire les valeurs de S et T.
   (d) A l'aide des formules d'Euler, montrer que : $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(-u^3\right)^k$ puis que :
   $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2\left(u - u^{10}\right)$
   (e) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$

PROBLEME I : Simplification d'une somme de cosinus liés à $\dfrac{\pi}{17}$

1. (a) On a : $T(a,h) = C(a,h) + iS(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\cos(a+kh)) + i\sum_{k=0}^{n-1} (\sin(a+kh)) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)}$.

   Donc $\boxed{T(a,h) = e^{ia}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ih}\right)^k}$

   (b) Si $\sin\dfrac{h}{2} = 0$ alors $h \equiv 0[2\pi]$ et donc $e^{ih} = 1$.

   Ainsi $\boxed{T(a,h) = ne^{ia}}$ et, en identifiant les parties réelles entre elles, et les parties imaginaires, on obtient : $\boxed{C(a,h) = n\cos(a) \text{ et } S(a,h) = n\sin(a)}$.

   (c) On suppose que $\sin\dfrac{h}{2} \neq 0$ et donc $e^{ih} \neq 1$. En utilisant le résultat général sur les sommes des n premiers termes d'une suite géométrique, on a : $T(a,h) = e^{ia}\dfrac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}}$.

   Or $1-e^{inh} = -2i\sin\dfrac{nh}{2}e^{i\frac{nh}{2}}$ et $1-e^{ih} = -2i\sin\dfrac{h}{2}e^{i\frac{h}{2}}$. Donc : $\boxed{T(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\, e^{i\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)}}$.

   Ainsi, on a : $\boxed{C(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \times \cos\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}} \text{ et } S(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \times \sin\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}}$

   Donner une expression simplifiée de $T(a,h)$ puis démontrer que :

2. On pose : $\theta = \dfrac{\pi}{17}$ et

   $$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta) \text{ et } x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

   (a) On a : $\cos(3\theta) + \cos(11\theta) = 2\cos(4\theta) \times \cos(7\theta)$.

   Ainsi : $x_1 = 2\cos(4\theta) \times \cos(7\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta)$. Or 4θ, 5θ et 7θ sont dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc leurs cosinus sont strictement négatifs. Ainsi $\boxed{x_1 > 0}$

   (b) $x_1 + x_2 = \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} (\cos(\theta + 2k\theta))$. Donc, à l'aide de la question 1) et en constatant que l'on a bien $\sin(\theta) \neq 0$, on a : $x_1 + x_2 = \dfrac{\sin(8\theta)\,\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}$ car $16\theta = \pi - \theta$ ici. Ainsi $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}}$

   (c) $x_1 \times x_2 = \cos(3\theta)\cos(\theta) + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) + \cos(5\theta)\cos(\theta) + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) + \cos(7\theta)\cos(\theta) + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) + \cos(11\theta)\cos(\theta) + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta)$

   Or : $\cos(3\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = -\frac{1}{2}\cos(15\theta) - \frac{1}{2}\cos(13\theta)$ car $4\theta = \pi - 13\theta$ et $2\theta = \pi - 15\theta$. De même :

   $\cos(3\theta)\cos(9\theta) = \frac{1}{2}\cos(12\theta) + \frac{1}{2}\cos(6\theta) = -\frac{1}{2}\cos(5\theta) - \frac{1}{2}\cos(11\theta)$, $\cos(3\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}\cos(16\theta) + \frac{1}{2}\cos(10\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos(7\theta)$

   $\cos(3\theta)\cos(15\theta) = \frac{1}{2}\cos(18\theta) + \frac{1}{2}\cos(12\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos(5\theta)$, $\cos(5\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\cos(6\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = -\frac{1}{2}\cos(11\theta) - \frac{1}{2}\cos(13\theta)$

   $\cos(5\theta)\cos(9\theta) = \frac{1}{2}\cos(14\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = -\frac{1}{2}\cos(3\theta) - \frac{1}{2}\cos(13\theta)$, $\cos(5\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}\cos(18\theta) + \frac{1}{2}\cos(8\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos(9\theta)$

   $\cos(5\theta)\cos(15\theta) = \frac{1}{2}\cos(20\theta) + \frac{1}{2}\cos(10\theta) = -\frac{1}{2}\cos(3\theta) - \frac{1}{2}\cos(7\theta)$, $\cos(7\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\cos(6\theta) + \frac{1}{2}\cos(8\theta) = -\frac{1}{2}\cos(11\theta) - \frac{1}{2}\cos(9\theta)$

   $\cos(7\theta)\cos(9\theta) = \frac{1}{2}\cos(16\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos(15\theta)$, $\cos(7\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}\cos(20\theta) + \frac{1}{2}\cos(6\theta) = -\frac{1}{2}\cos(3\theta) - \frac{1}{2}\cos(11\theta)$

   $\cos(7\theta)\cos(15\theta) = \frac{1}{2}\cos(22\theta) + \frac{1}{2}\cos(8\theta) = -\frac{1}{2}\cos(5\theta) - \frac{1}{2}\cos(9\theta)$, $\cos(11\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\cos(12\theta) + \frac{1}{2}\cos(10\theta) = -\frac{1}{2}\cos(5\theta) - \frac{1}{2}\cos(7\theta)$

   $\cos(11\theta)\cos(9\theta) = \frac{1}{2}\cos(20\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}\cos(3\theta) - \frac{1}{2}\cos(15\theta)$, $\cos(11\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}\cos(24\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}\cos(7\theta) - \frac{1}{2}\cos(15\theta)$

   $\cos(11\theta)\cos(15\theta) = \frac{1}{2}\cos(26\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = -\frac{1}{2}\cos(9\theta) - \frac{1}{2}\cos(13\theta)$

   D'où, en remarquant que chaque terme (parmi les $\cos(k\theta)$ pour k entier impair entre 1 et 15) apparait 4 fois, on a :

   $x_1 \times x_2 = -2\left(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\right) = -2\left(x_1 + x_2\right)$

   et donc $\boxed{x_1 \times x_2 = -1}$

(d) Comme $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1 \times x_2 = -1$, on peut en déduire que x_1 et x_2 sont les racines de l'équation : $z^2 - \frac{1}{2}z - 1 = 0$. Cette équation possède pour solution $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

Comme on sait de plus que x_1 est positif, on a : $\boxed{x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}}$

PROBLEME II : Racines 11e de l'unité

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. On note $U_n = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^n = 1\right\}$.

(a) Il est clair que U_n est non vide (contient 1), stable par multiplication (le produit de deux solutions de $z^n = 1$ vérifie encore cette équation), multiplication qui reste associative, commutative, possède un élément neutre 1 qui est dans U_n, et tout élément de U_n possède un inverse qui est encore une racine n-ième de l'unité. Ainsi $\boxed{(U_n, \times) \text{ est un groupe commutatif}}$

(b) $\boxed{U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \; ; \; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$: $\boxed{\text{la somme des éléments de } U_n \text{ est nulle}}$.

2. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$

(a) Les conjugués de u, u^3, u^4, u^5 et u^9 sont respectivement u^{10}, u^8, u^7, u^6 et u^2.
Donc $\boxed{S \text{ et } T \text{ sont conjugués}}$

(b) La partie imaginaire de S est $Y_S = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)$.
Or $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) = 2\sin\left(\frac{12\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) > 0$ car $\sin\left(\frac{12\pi}{11}\right) < 0$ car $\pi < \frac{12\pi}{11} < 2\pi$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) < 0$ car $\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{11} < \pi$. D'autre part $\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$, $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)$ et $\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)$ sont positifs car les angles sont dans $[0, \pi]$. Ainsi $Y_S > 0$: $\boxed{\text{la partie imaginaire de } S \text{ est positive}}$

(c) $S + T = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10}$ est la somme de toutes les racines 11es de l'unité sauf 1. Donc $\boxed{S + T = -1}$.
En développant $S \times T$, on trouve : $S \times T =$
$\left(u^3+u^7+u^8+u^9+u^{11}\right)+\left(u^5+u^9+u^{10}+u^{11}+u^{13}\right)+\left(u^6+u^{10}+u^{11}+u^{12}+u^{14}\right)+\left(u^7+u^{11}+u^{12}+u^{13}+u^{15}\right)+\left(u^{11}+u^{15}+u^{16}+u^{17}+u^{19}\right)$
$= \left(u^3+u^7+u^8+u^9+1\right)+\left(u^5+u^9+u^{10}+1+u^2\right)+\left(u^6+u^{10}+1+u+u^3\right)+\left(u^7+1+u+u^2+u^4\right)+\left(1+u^4+u^5+u^6+u^8\right)$
$= 5 + 2\left(u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+u^7+u^8+u^9+u^{10}\right) = 5 + 2(S+T)$. Donc $\boxed{S \times T = 3}$.
On en déduit que S et T sont les racines de l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Comme on sait que la partie imaginaire de S est positive, on en déduit : $\boxed{S = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2} \text{ et } T = \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}}$

(d) Soit θ un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On a :
$i\tan(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$. En appliquant ce résultat à $\theta = \frac{3\pi}{11}$, on trouve bien : $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{e^{\frac{6i\pi}{11}}-1}{e^{\frac{6i\pi}{11}}+1} = \frac{u^3-1}{u^3+1}$.
D'autre part, en utilisant la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=1}^{10}\left(-u^3\right)^k = -u^3\frac{1-\left(-u^3\right)^{10}}{1+u^3} = \frac{-u^3+u^{33}}{1+u^3} = \frac{1-u^3}{1+u^3}$. Ainsi, on a bien

$\boxed{i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)=\frac{u^3-1}{u^3+1}=-\sum_{k=1}^{10}\left(-u^3\right)^k}$. Par ailleurs : $2\left(u-u^{10}\right)=2\left(u-\overline{u}\right)=4i\,\mathrm{Im}(u)$

donc $\boxed{4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=2\left(u-u^{10}\right)}$

(e) $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)= u^3-u^6+u^9-u^{12}+u^{15}-u^{18}+u^{21}-u^{24}+u^{27}-u^{30}+2u-2u^{10}$

donc $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=u^3-u^6+u^9-u+u^4-u^7+u^{10}-u^2+u^5-u^8+2u-2u^{10}=$
$(u+u^3+u^4+u^5+u^9)-(u^2-u^6-u^7-u^8-u^{10})=S-T$

Donc $\boxed{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=i\left(T-S\right)=\sqrt{11}}$