Devoir en temps libre n° 2

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x\ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

1. Etudier les fonctions f et g. On veillera aux limites aux bornes du domaine de définition.
2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression factorisée de $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\phi(1)$ et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

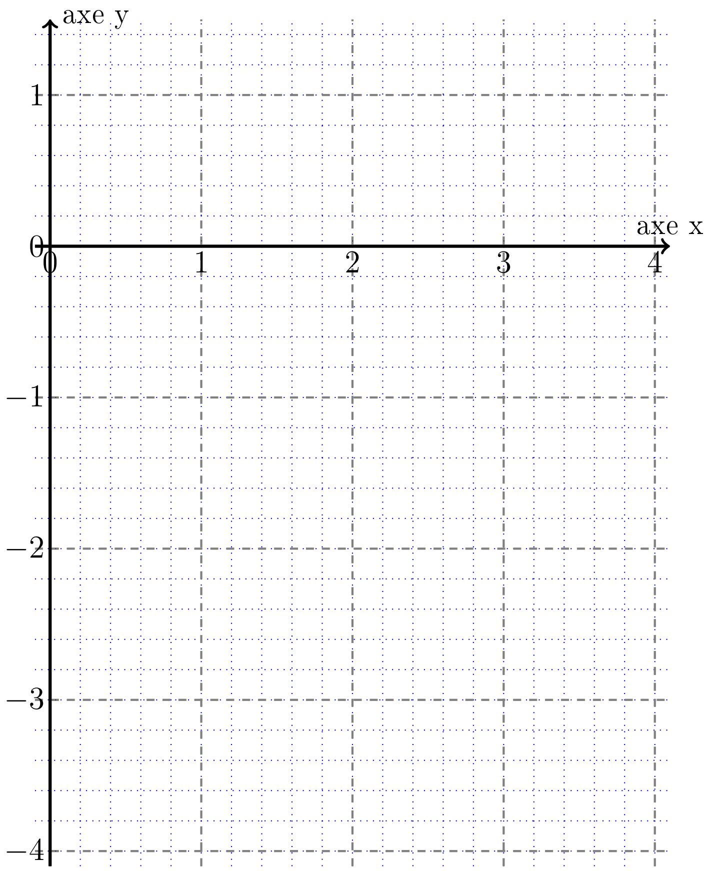
Partie II : Calcul d'intégrales

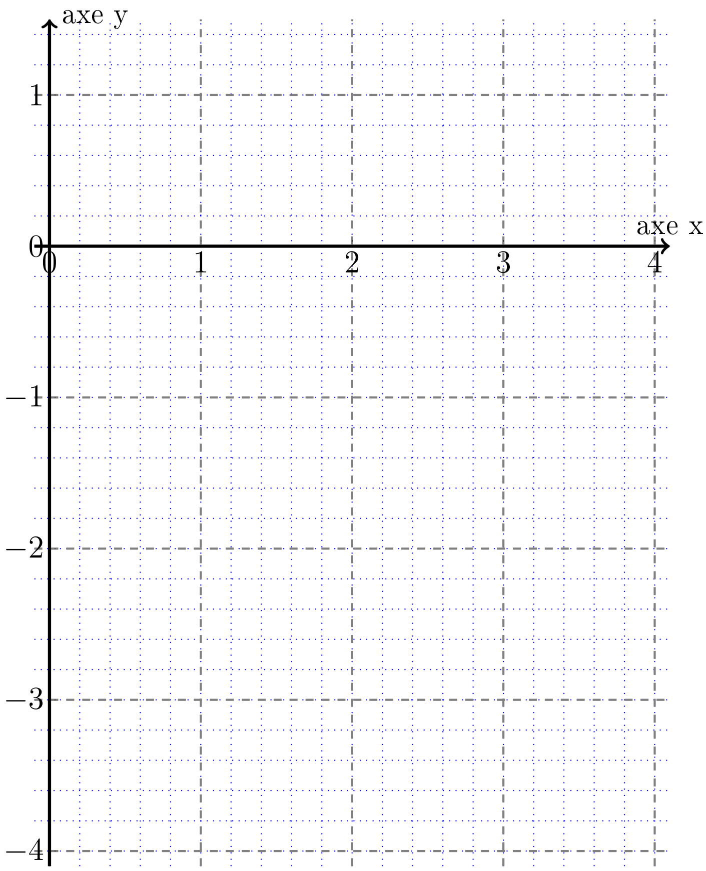
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\qquad I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx \qquad$ et $\qquad J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

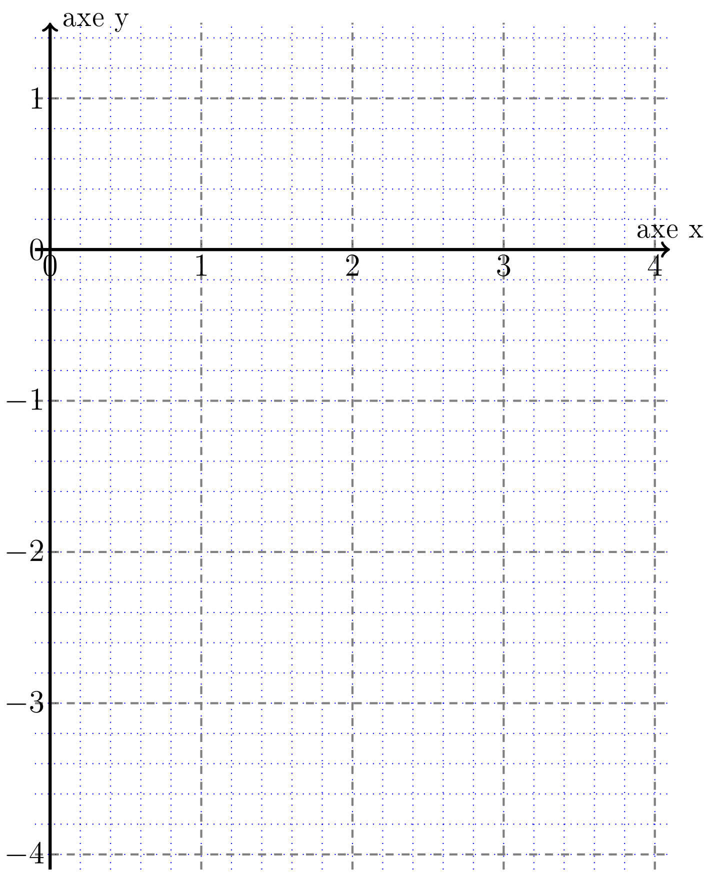
1. Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $\psi(x) = x^2\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la valeur de $J(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3. On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} (I(a) - J(a))$.

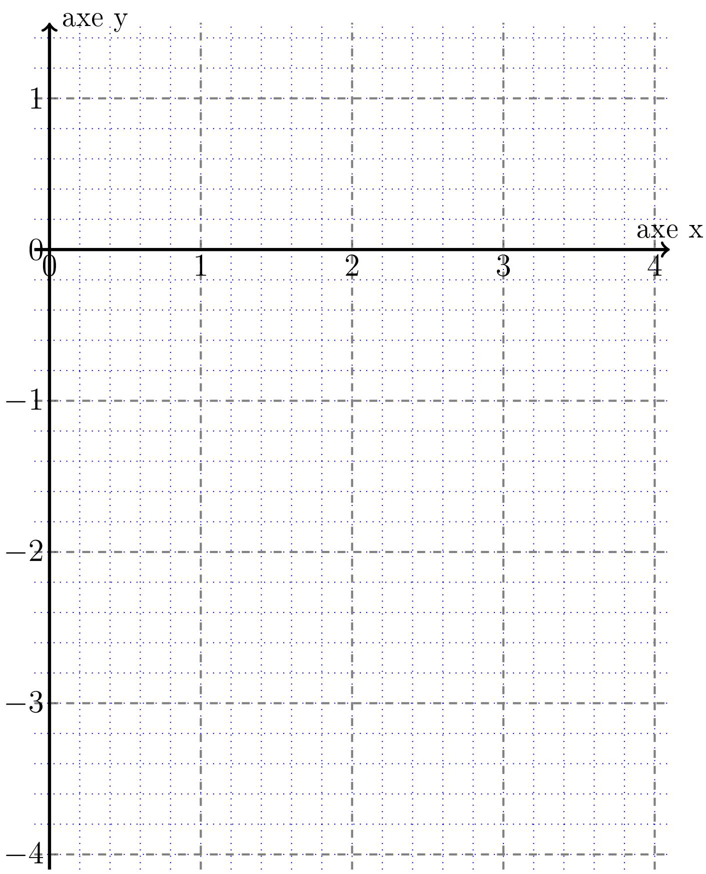
Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. Justifier que l'équation $\quad g(x) = -24 \quad$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α et montrer que $\alpha \in [9, 11]$.
2. On pose $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [9, 11]$, $\quad h(x) \in [9, 11]$.
   (b) On pose $K = \dfrac{2}{3(\ln 3)^2}$. Montrer que, pour tout $t \in [9, 11]$, $\quad |h'(t)| \leqslant K$
   (c) En déduire que pour tout $x \in [9, 11]$, $\quad |h(x) - h(\alpha)| \leqslant K\,|x - \alpha|$.
   On pourra remarquer que $h(x) - h(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^x h'(t)dt$
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [9, 11]$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant 2\,K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α
   (c) En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de α à ε près où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.


axe y
axe x
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4


axe y
axe x
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4


axe y
axe x
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4


axe y
axe x
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4