

# MPSI 15-16 Feuille n° 03 : Fonctions usuelles

Du 22/09/15 au 28/09/15

**Exercice 1.** Soit  $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$ . Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) \quad , \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb) \quad , \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a + kb)$$

**Exercice 2.** Montrer que :

$$1. \quad 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \qquad 2. \quad \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

**Exercice 3.** Calculer :

$$1. \quad x = \arcsin \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ en formant } \cos 4x \qquad 2. \quad \operatorname{ch}^5 x$$
$$3. \quad \cos(\arcsin x + \arcsin y)$$

**Exercice 4.** Montrer que  $\arctan(1+x) - \arctan x = \arctan \frac{1}{1+x+x^2}$ .

En déduire une expression simple de  $S_n = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} + \dots + \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$  ainsi que sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 5.** Montrer que  $\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)$  est constant.

**Exercice 6.** Trouver les monotonies de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  et  $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

**Exercice 7.** Simplifier les expressions suivantes puis tracer les graphes des fonctions associées :

$$1. \quad f(x) = \sin(3 \arcsin x) \qquad 7. \quad f(x) = \arctan(\tan x)$$
$$2. \quad f(x) = \arcsin(3 \sin x) \qquad 8. \quad f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$
$$3. \quad f(x) = \sin(2 \arctan x) \qquad 9. \quad f(x) = \arccos\left(\cos \frac{x}{3}\right)$$
$$4. \quad f(x) = \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x) \qquad 10. \quad f(x) = \sin(2 \arcsin x)$$
$$5. \quad f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) \qquad 11. \quad f(x) = \arcsin(\sin 2x)$$
$$6. \quad f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

**Exercice 8.** Résoudre les équations suivantes ou calculer :

$$1. \quad \arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \qquad 4. \quad C = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$2. \quad A = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \qquad 5. \quad D = \arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 2 \arctan(t)$$
$$3. \quad B = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

**Exercice 9.** Soit  $f$  la fonction définie par la relation :  $f(y) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$ .

Déterminer le domaine de définition de  $f$ . Si  $x = f(y)$ , calculer  $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ ,  $\operatorname{th}(x)$  et  $\operatorname{ch}(x)$

**Exercice 10.** Prouver les inégalités suivantes (on précisera les domaines de validité).

$$1. \coth(2x) = \frac{1}{2} (\operatorname{th}(x) + \coth(x))$$

$$2. 2 \arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arctan(\operatorname{sh}(2x))$$

**Exercice 11.** Comparer les deux fonctions définies par :  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$  et  $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$

**Exercice 12.** Après avoir montré  $\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(kx) \times \operatorname{ch}((k+1)x)}$ , calculer :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \times \operatorname{ch}((k+1)x)}$$

**Exercice 13.** Résoudre l'équation (d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^+$ ) :  $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

**Exercice 14.** Résoudre les équations :

$$1. \arccos(x) = \arccos(2x)$$

$$3. \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x-3} + \arctan \frac{1}{x+3} = \frac{\pi}{4}$$

$$2. 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 15.** 1. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$

2. En déduire  $\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$

**Exercice 16.** Soit  $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ . Calculer :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$