Devoir en temps libre n° 2

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x\ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

1. Etudier les fonctions f et g. On veillera aux limites aux bornes du domaine de définition.
2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression factorisée de $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\phi(1)$ et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

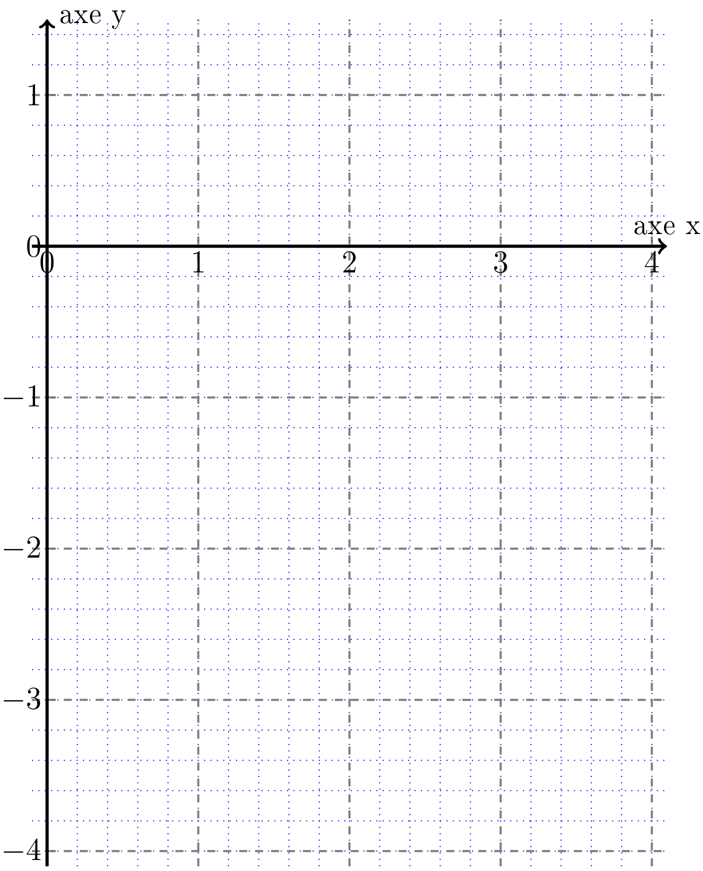
Partie II : Calcul d'intégrales

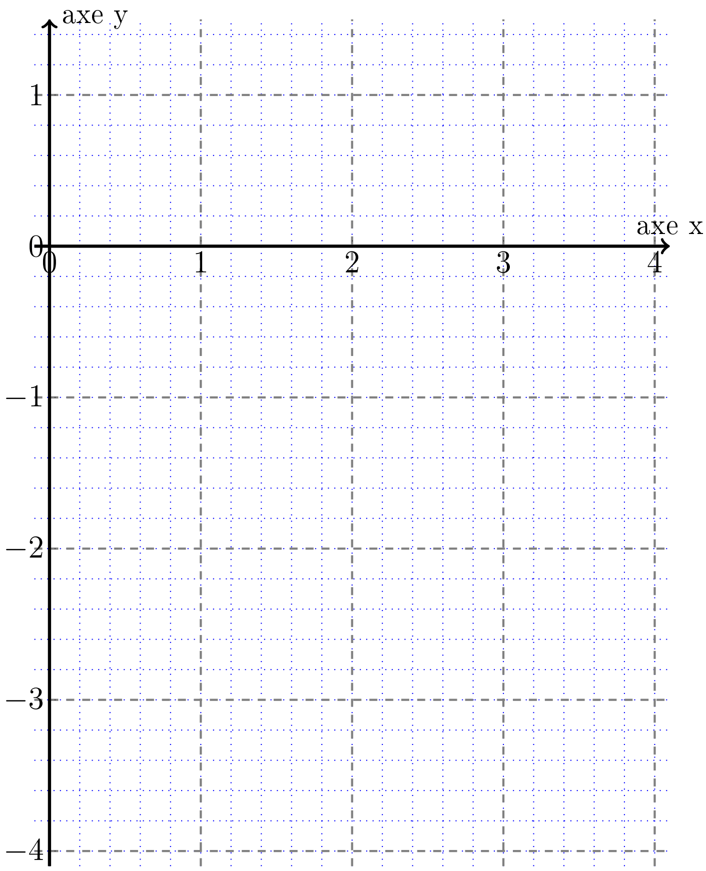
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\quad I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx \quad$ et $\quad J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

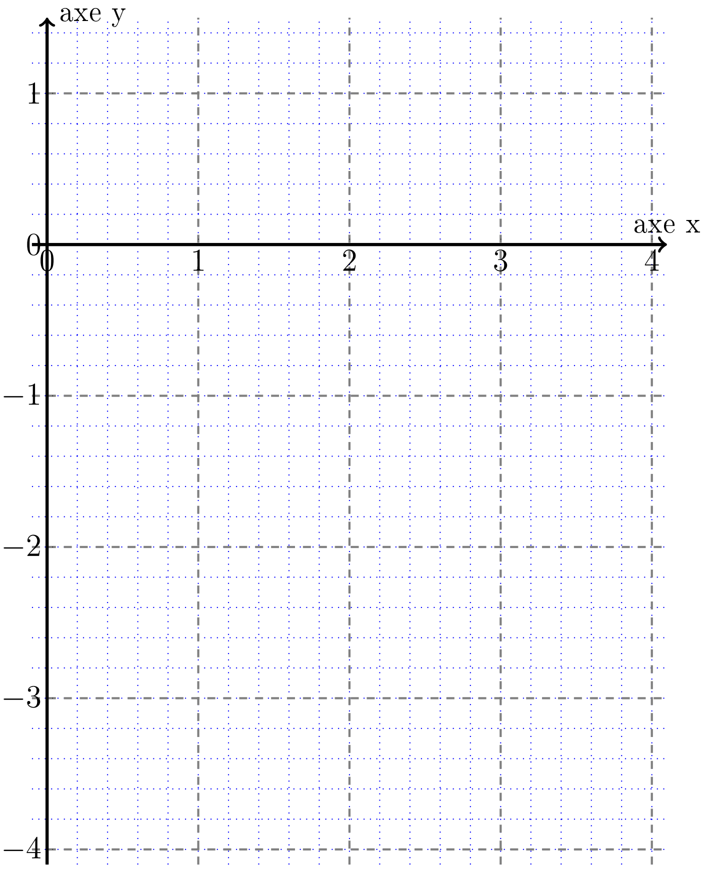
1. Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $\psi(x) = x^2\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la valeur de $J(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3. On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} (I(a) - J(a))$.

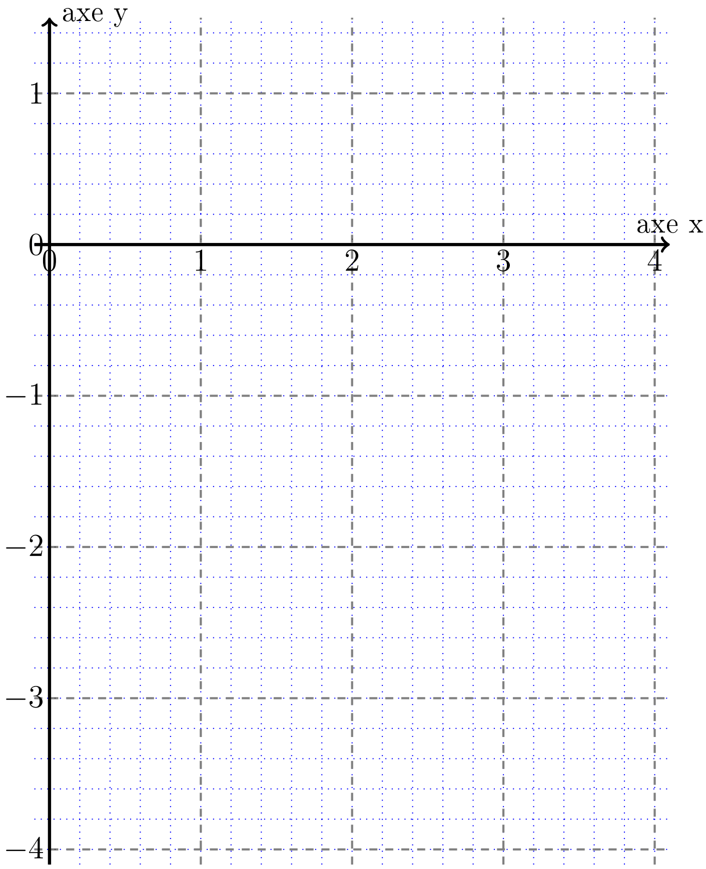
Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. Justifier que l'équation $\quad g(x) = -24 \quad$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α et montrer que $\alpha \in [9, 11]$.
2. On pose $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [9, 11]$, $\quad h(x) \in [9, 11]$.
   (b) On pose $K = \dfrac{2}{3\,(\ln 3)^2}$. Montrer que, pour tout $t \in [9, 11]$, $\quad |h'(t)| \leqslant K$
   (c) En déduire que pour tout $x \in [9, 11]$, $\quad |h(x) - h(\alpha)| \leqslant K\,|x - \alpha|$.
   On pourra remarquer que $h(x) - h(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^x h'(t)dt$
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [9, 11]$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant 2\,K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α
   (c) En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de α à ε près où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.


axe y
1
0
−1
−2
−3
−4
axe x
0
1
2
3
4


axe y
1
0
−1
−2
−3
−4
axe x
0
1
2
3
4


axe y
1
0
−1
−2
−3
−4
axe x
0
1
2
3
4


axe y
1
0
−1
−2
−3
−4
axe x
0
1
2
3
4

PROBLEME I : Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ et $g(x) = -x\ln(x)$
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

1. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

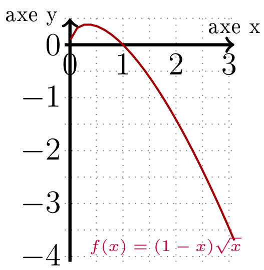
   On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}} \text{ et } g'(x) = -(1+\ln(x))}$.

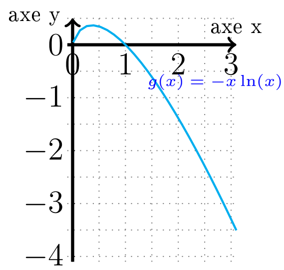
   Par ailleurs, en comparant les limites des fonctions usuelles, on a :
   $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0}$. Remarquons qu'en étudiant les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$ et $\dfrac{g(x)}{x}$ en 0 et en $+\infty$, on trouve que les deux courbes admettent une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$, et une demi-tangente horizontale en 0^+ .
   On obtient les tableaux de variation :

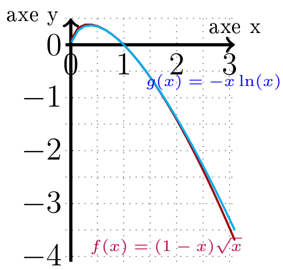
x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.







3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\boxed{\phi'(x) = -\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}}$.

4. Comme $\phi(1) = 0$ et que ϕ est décroissante, on en déduit que ϕ est positive sur $]0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$. Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } \mathscr{C}_g \text{ sur }]0,1] \text{ et en dessous sur } [1,+\infty[}$.

Partie II : Calcul d'intégrales

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx$ et $J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

1. $I(a) = \left[\dfrac{2}{3}t^{2/3} - \dfrac{2}{5}t^{2/5}\right]_a^1$. Donc $\boxed{I(a) = \dfrac{4}{15} - \dfrac{2}{3}a^{2/3} + \dfrac{2}{5}a^{2/5}}$.

2. On pose $\psi(x) = x^2 \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\boxed{\psi'(x) = 2\,x\,\ln(x) + x}$. Donc $\boxed{\textbf{une primitive de } g \textbf{ est } x \to \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\ln(x)}{2}}$. Ainsi pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{J(a) = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2\ln(a)}{2}}$.
3. En posant $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et en utilisant $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, on a $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0}$.
4. $I(a)$ et $J(a)$ tendent respectivement vers $\frac{4}{15}$ et $\frac{1}{4}$ lorsque a tend vers 0. Donc $\boxed{\lim_{a\to 0^+} (I(a) - J(a)) = \frac{1}{60}}$

Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. g est positive sur $]0,1]$ et est continue, strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ avec la valeur 0 en 1 et la limite $-\infty$ en $+\infty$. Ainsi, par théorème d'homéomorphisme, $\boxed{g \textbf{ est une bijection de } [1,+\infty[\textbf{ vers }]-\infty,0]}$. En particulier $\boxed{\textbf{l'équation} \quad g(x) = -24 \quad \textbf{admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^* \textbf{ que l'on note } \alpha}$.
Comme $g(9) = -19.78$ à 10^{-2} près et $g(11) = -26.38$ à 10^{-2} près, on a : $g(9) > g(\alpha) = -24 > g(11)$ donc par décroissance de g, on a $\boxed{\alpha \in [9,11]}$.
2. On pose $h(x) = \frac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Par positivité et croissance de ln sur $[9,11]$, h est décroissante sur $[9,11]$. Or $h(9) = 10.92$ à 10^{-2} près et $h(11) = 10.01$ à 10^{-2} près sont dans $[9,11]$. Ainsi $\boxed{\forall x \in [9,11], \quad h(x) \in [9,11]}$
   (b) Pour tout $x \in [9,11]$, $h'(x) = -\frac{24}{x\,\ln^2(x)}$. Ainsi $|h'|$ est décroissante sur $[9,11]$. Comme $|h'(9)| = \frac{2}{3\,(\ln 3)^2} = K$, on a : $\boxed{\forall t \in [9,11], \quad |h'(t)| \leqslant K}$
   (c) Soit $x \in [9,11]$. On a : $|h(x) - h(\alpha)| = \left|\int_\alpha^x h'(t)dt\right| \leqslant \left|\int_\alpha^x |h'(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_\alpha^x K dt\right|$. Ainsi, pour tout $x \in [9,11]$, $\boxed{|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K\,|x - \alpha|}$.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Comme on a $u_0 \in [9,11]$ et $[9,11]$ stable par h, on a : $\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [9,11]}$. Ensuite, on remarque que, comme $g(\alpha) = -24$, alors $h(\alpha) = \alpha$. Donc en appliquant l'inégalité obtenue en 2c à $x = u_n$, on a : $\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant K\,|u_n - \alpha|}$
   (b) Par récurrence immédiate, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant 2\,K^n}$ avec $K < 1$. Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } \alpha}$
   (c) On peut proposer l'algorithme suivant (on suppose importé numpy avec l'alias np) :

```python
def approchalpha(epsilon):
  """calcul d'une valeur approchée de \alpha à epsilon près """
  resultat , maj , K = 9 , 2 , 2/(3*(np.log(3))**2)
  while maj > epsilon :
    resultat = 24/np.log(resultat)
    maj *= K
  return resultat
```

   On trouve avec epsilon $= 10^{-6}$, $\boxed{\alpha = 10.293673 \textbf{ à } 10^{-6} \textbf{ près}}$