Devoir en temps libre N° 3

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Construction de argsh et étude d'une fonction associée

Partie I Construction de la fonction argsh

1. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note argsh l'application réciproque de sh.
2. Cette fonction argsh est-elle dérivable sur I ? Lorsque c'est possible, calculer $\operatorname{argsh}'(x)$
3. Soit ϕ définie par : $\phi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de ϕ. Déterminer la parité de ϕ. Etudier la dérivabilité de ϕ et calculer sa dérivée lorsqu'elle est définie. En déduire que $\phi = \operatorname{argsh}$
   (b) Retrouver par un calcul direct, c'est à dire sans passer par les dérivées, le résultat précédent.

Partie II Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f
   (b) Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ lorsqu'il est défini
   (c) Etudier l'existence d'une limite pour f en $+\infty$. Qu'en déduire pour le graphe de f ?
   (d) Etudier la parité de f .
2. A l'aide de la partie I, résoudre les équations : $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{3}$ et $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$
   On désigne par f_1 la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$
3. Dresser le tableau de variations de f_1. Tracer sa courbe représentative.

Partie III Construction d'une bijection

1. Montrer que la fonction f_1 est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.
2. Démontrer que l'application réciproque f_1^{-1} de f_1 est donnée par les deux formules :
   $\forall y \in J, f_1^{-1}(y) = \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{\tan(y)}\right) = -\ln\left(\tan\left(\dfrac{y}{2}\right)\right)$
3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(x) + \pi$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$ et $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$
   (a) Trouver une formule donnant $g(x)$ valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   (b) Démonter que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.
4. Représenter sur une même figure les courbes représentatives de g et de g^{-1}