Devoir surveillé N^{o} 1 (4 heures)

Ce devoir est constitué de huit exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$. En déduire que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\, e^x = 0$
2. Rappeler pourquoi on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
3. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Réduire le domaine d'étude par les éventuelles périodicités.
4. Etudier les branches infinies de f.
5. Etudier les variations de f. Dresser le tableau de variation.
6. Que dire de $\lim\limits_{t\to 0^-} f'(t)$? Qu'en déduit-on pour le graphe (G) de la fonction f ?
7. Tracer le graphe (G) de la fonction f.

Exercice 2 : Equation à deux inconnues $x^y = y^x$

Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) suivante, d'inconnues $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$:

$$(E) \qquad \begin{cases} x^y = y^x \\ 0 < x < y \end{cases}$$

On notera f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. On rappelle qu'on a $e = 2.7$ à 10^{-1} près *On pourra utiliser sans démonstration la relation* $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$ *valable pour tout* $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

1. Étudier f. Domaine de définition, limites, tableau de variation, tracé ….
   Pour le tracé, on ne se placera pas dans un repère orthonormé : on prendra pour unité 2 cm en abscisse et 8 cm en ordonnée
2. Montrer que, si (x, y) est une solution de (E), alors $f(x) = f(y)$.
3. En déduire que, si (x, y) est une solution de (E), alors $x \in]1, e[$ et $y \in [e, +\infty[$.
4. Résoudre (E)

Exercice 3 : Système d'équation à deux inconnues $z^n = (z-1)^n = 1$

1. Résoudre le système d'équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} \left|z\right| = 1 \\ \left|z-1\right| = 1 \end{cases}$
2. Trouver alors tous les couples $(z, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$ tels que : $\begin{cases} (z)^n = 1 \\ (z-1)^n = 1 \end{cases}$

Exercice 4 : Petit exercice de trigonométrie

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $a = \sin(t) + \cos(t)$.

1. Calculer $\sin(t)\cos(t)$ en fonction de a.
2. Calculer $\sin^3(t) + \cos^3(t)$ en fonction de a.
3. Calculer $\sin^5(t) + \cos^5(t)$ en fonction de a.

Exercice 5 : Equation algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$.
On montrera en particulier que toutes les solutions de cette équation sont réelles.
Combien y-a-t-il de solutions ?

Exercice 6 : Equation $2z^4 - 4z^3 + (1-4i)z^2 - (6-8i)z - 3 + 4i = 0$

Soit l'équation d'inconnue complexe z :

$$2z^4 - 4z^3 + (1-4i)z^2 - (6-8i)z - 3 + 4i = 0 \text{ (E)}$$

1. Déterminer le nombre de solutions réelles de (E) ainsi que, le cas échéant, ces solutions réelles.
2. En déduire toutes les solutions de (E)

Exercice 7 : Somme de cosinus

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Montrer que : $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$
3. En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2$ en fonction de n.
4. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si $p = 0$ ou $p = n$ et est nulle sinon.

Exercice 8 : Exercice de trigonométrie

1. Déterminer deux réels $A > 0$ et ϕ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = A\cos(x - \phi)$. Transformer de même $\cos(x) - \sin(x)$
2. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}$.
3. Déterminer les solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos(x) - \sin(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
4. Déterminer le signe sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ de $\dfrac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, on obtient en posant $t = -x$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0}$

2. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ car la fonction exponentielle admet 1 comme dérivé en 0}}$

3. $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$ et il ne semble pas y avoir de réductions possibles.

4. – en $+\infty$ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 3$ car on a $f(x) - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2e^{\frac{1}{x}}$ ce qui tend vers 3. Ainsi

   le graphe de f possède la droite d'équation $Y = X + 3$ pour asymptote.

   – en $-\infty$ A part la limite de f, on a les mêmes résultats :

   le graphe de f possède la droite d'équation $Y = X + 3$ pour asymptote.

   – 0^+ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$: **la droite verticale d'équation $X = 0$ est asymptote.**

   – 0^- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$: on a un **point d'arret** .

   On complètera l'étude à la question 6 en recherchant la pente limite de la tangente en ce point.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

5. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

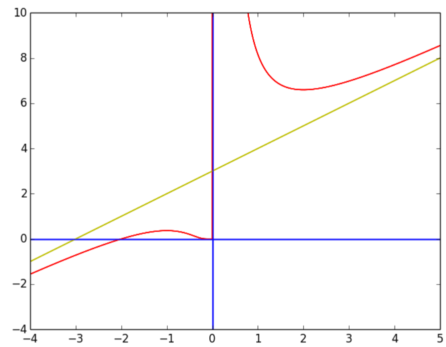
   $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$. On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, on a : lorsque x tend vers 0^-, t tend vers $-\infty$.

   Or $\lim\limits_{t \to -\infty} t^t\, e^t = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^-} f'(t) = 0}$.

   On en déduit que la courbe de f possède en 0^- une **demi-tangente horizontale**



7. On a le graphe :

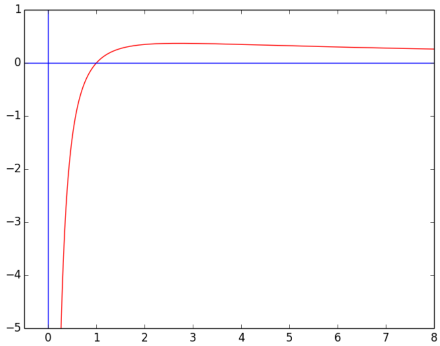
Exercice 2 : Equation à deux inconnues $x^y = y^x$

Soit l'équation (E) d'inconnues $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$: $x^y = y^x$ avec $0 < x < y$

On notera f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. On rappelle qu'on a $e = 2.7$ à 10^{-1} près

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Le graphe de f possède **une asymptote horizontale d'équation $Y = 0$** .
   Il possède également **une asymptote verticale d'équation $X = 0$**

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



2. Si (x, y) est une solution de (E), alors : $x^y = y^x$ donc en prenant le logarithme, $y\ln(x) = x\ln(y)$ et donc comme x et y sont strictement positifs, $f(x) = f(y)$.
   Donc **si (x, y) est une solution de (E) alors $f(x) = f(y)$**
3. f est strictement monotone sur $]0, e[$ et sur $[e, +\infty[$. Donc pour que l'on ait $f(x) = f(y)$ avec $x < y$, il faut nécessairement $x \in]0, e[$ et $y \in [e, +\infty[$. Mais alors $f(x) = f(y) > 0$ et sur $]0, e[$, f n'est positive que sur $]1, e[$. Donc on a : **$x \in]1, e[$ et $y \in [e, +\infty[$**
4. Le seul entier dans $]1, e[$ est 2. Donc si (x, y) est solution on a nécessairement $x = 2$ et $y > e$ doit vérifier : $\dfrac{\ln(y)}{y} = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Mais f est une bijection de $[e, +\infty[$ vers $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$, donc il n'y a qu'une valeur dans $[e, +\infty[$ dont l'image par f est $\dfrac{\ln(2)}{2}$. Or il se trouve que 4 vérifie $f(4) = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Ainsi **si (x, y) est solution de (E), alors $(x, y) = (2, 4)$** . Réciproquement $(2, 4)$ est bien solution d'un problème.

Exercice 3 : Système d'équation à deux inconnues $z^n = (z-1)^n = 1$

1. Soit (S) le système d'équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-1| = 1 \end{cases}$ Si z est solution de (S), on a $z \in U$ donc z de la forme $z = e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi[$. Mais alors $|z-1| = 1 \iff 2\sin\dfrac{t}{2}$ i.e. $t = \dfrac{\pi}{3}$ ou $t = \dfrac{5\pi}{3}$ donc $z = -j$ ou $z = -j^2$.
   Réciproquement ces deux valeurs sont solutions de (S) .
   Ainsi, **l'ensemble des solutions de (S) est $\{-j, -j^2\}$**
2. Soit (S_2) le système d'inconnues $(z, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} (z)^n = 1 \\ (z-1)^n = 1 \end{cases}$ Si (z, n) est une solution de (S_2), on a $|z| = |z-1| = 1$ donc $z = -j$ ou $-j^2$. Mais alors le système (S_2) devient : $(-j)^n = 1 = \left(-j^2\right)^n$. Ainsi n est un multiple pair de 3 i.e. n est un multiple de 6.
   Réciproquement, on montre que si z vaut $-j$ ou $-j^2$ et si n est un multiple de 6, (z, n) est bien solution de (S_2). Ainsi
   l'ensemble des solutions de (S) est $\{(-j, 6p)\,;p \in \mathbb{N}\} \bigcup \left\{\left(-j^2, 6p\right)\,;p \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 4 : Petit exercice de trigonométrie

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $a = \sin(t) + \cos(t)$.

1. On a : $a^2 = \sin^2(t) + 2\sin(t)\times\cos(t) + \cos^2(t) = 1 + 2\sin(t)\cos(t)$. Ainsi $\boxed{\sin(t)\cos(t) = \dfrac{a^2-1}{2}}$.
2. On a : $a^3 = \sin^3(t)+3\sin^2(t)\cos(t)+3\sin(t)\cos^2(t)+\cos^3(t) = \left(\sin^3(t)+\cos^3(t)\right)+3\sin(t)\cos(t)\left(\sin(t)+\cos(t)\right)$.

   Ainsi $\sin^3(t)+\cos^3(t) = a^3 - 3a\,\dfrac{a^2-1}{2}$. Donc $\boxed{\sin^3(t)+\cos^3(t) = \dfrac{a\left(3-a^2\right)}{2}}$.
3. De même pour $\sin^5(t)+\cos^5(t)$, on calcule a^5 et on utilise les expressions de $\sin(t)\cos(t)$ et $\sin^3(t)+\cos^3(t)$.

   On trouve alors $\boxed{\sin^5(t)+\cos^5(t) = \dfrac{a\left(5-a^4\right)}{4}}$.

Exercice 5 : Equation algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (E) l'équation : $(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$.
On constate que i n'est pas solution. On supposera alors $z \neq i$. L'équation (E) devient alors $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$. Aussi comme $\dfrac{z+i}{z-i}$ ne peut être égal à 1, on a :

$$z \text{ solution de } (E) \iff \exists k \in [\![1,2n]\!] \,\Big|\, \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff \exists k \in [\![1,2n]\!] \,\Big|\, 2z\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}$$

Donc $\boxed{z \textbf{ solution de } (E) \iff \exists k \in [\![1,2n]\!] \,\Big|\, z = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

$\boxed{\textbf{Toutes les solutions sont réelles et il y en a } 2n}$

Exercice 6 : Equation $2z^4 - 4z^3 + (1-4i)z^2 - (6-8i)z - 3 + 4i = 0$

Soit l'équation d'inconnue complexe z :

$$2z^4 - 4z^3 + (1-4i)z^2 - (6-8i)z - 3 + 4i = 0 \text{ (E)}$$

1. Soit x un réel.

   x solution de (E) $\iff 2x^4 - 4x^3 + (1-4i)x^2 - (6-8i)x - 3 + 4i = 0 \iff (2x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 3) + i\left(-4x^2 + 8x + 4\right) = 0$

   $$\iff \begin{cases} 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0 \\ -4x^2 + 8x + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(2x^2+3\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \iff x \in \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$$

   On a donc $\boxed{\textbf{2 solutions réelles } 1+\sqrt{2} \textbf{ et } 1-\sqrt{2}}$
2. On factorise l'équation (E) : z solution de (E) $\iff \left(2x^2+3-4i\right)\left(x^2-2x-1\right) = 0$

   Ainsi $\boxed{\textbf{l'ensemble des solutions de (E) est } S = \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\sqrt{2}\right\}}$

Exercice 7 : Somme de cosinus

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. La somme des racines $n-$iemes de l'unité étant nulle, on a $\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0}$
2. En prenant la partie réelle dans la somme précédente, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0}$
3. On a : $\left|\omega^k - 1\right|^2 = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = 2 - 2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = 2n}$
4. Lorsque p est un multiple de n. $\omega^p = 1$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = n}$ Lorsque p n'est pas un multiple de n. ω^p est une racine $n-$ieme de 1 autre que 1. Donc en utilisant le résultat sur la somme des n premiers termes

d'une suite géométrique, on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = 0}$.

Exercice 8 : Exercice de trigonométrie

1. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}$.
2. Déterminer les solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos(x) - \sin(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
3. Déterminer le signe sur l'intervalle $[0, \pi]$ de $\dfrac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$. De même $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$
2. On a $f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2} = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}$. Donc, en utilisant les extremas connus de cos, on en déduit que $\boxed{\textbf{les extremas de } f \textbf{ sont } 2+\sqrt{2} \textbf{ et } -2+\sqrt{2}}$
3. Soit $g(x) = \cos(x) - \sin(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On a : $g(x) = \sqrt{2}\left(\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2}\right)$.

   Ainsi $\boxed{\textbf{les zéros de } g \textbf{ constituent l'ensemble } \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}}$
4. En utilisant les expressions précédentes que l'on transforme à l'aide des formules trigonométriques $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$, on trouve : $\dfrac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}\,\dfrac{\cos\left(\frac{12x-\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{12x-7\pi}{24}\right)}{\sin\left(\frac{12x-\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{12x+7\pi}{24}\right)}$ D'où le tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		$\frac{19\pi}{12}$		2π
$\cos\left(\frac{12x-\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{12x-7\pi}{24}\right)$		+		+	0	−		−	0	+	
$-\sin\left(\frac{12x-\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{12x+7\pi}{24}\right)$		+	0	−		−	0	+		+	
$\frac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

   Ainsi, sur $[0, 2\pi]$, $\boxed{\dfrac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} > 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\bigcup \left]\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right[\bigcup \left]\frac{19\pi}{12}, 2\pi\right]}$