

# MPSI 15-16 Feuille n° 05 : Equations différentielles

Du 01/10/15 au 08/10/15

**Exercice 1.** On cherche toutes les fonctions dérivables  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telles que :

$$(E) \quad \forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, f(t+x) = f(t)f(x)$$

1. Montrer que si  $f$  vérifie (E) et s'annule en un point, alors  $f$  est la fonction nulle
2. Montrer que si  $f$  est une fonction dérivable non nulle vérifiant (E), alors la fonction  $\frac{f'}{f}$  est une constante. En déduire que  $f$  est une exponentielle.

**Exercice 2.** Résoudre :

1.  $y' + 2y = e^{-2x} + \sin(x)$
2.  $xy' - y - x(\operatorname{sh}^3 x)y = 0$
3.  $(x^2 - 1)y' - 2xy = x^2 + 8x + 1$
4.  $xy' = y + x$
5.  $y' - 5y = (x^2 - 1)e^x$

**Exercice 3.** Résoudre :

1.  $y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{ch}(x)$
2.  $y'' - 2y' + y = 6x e^x$
3.  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos(2x)$
4.  $y'' + 2y' - 8y = 4(3x + 5) e^{2x}$

**Exercice 4.** Résoudre :

1.  $y'' + 4y' + 5y = \cos(x) \operatorname{ch}(2x) \sin(x) e^x$
2.  $y'' - 2ky' + (k^2 + 1)y = \sin(x) e^x$
3.  $y'' - 6y' + 9y = \operatorname{sh}^3(x)$
4.  $y'' - 4y' + 4y = x e^x$
5.  $y'' - y = x^2 e^{-x}$

**Exercice 5.** Résoudre :

1.  $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$
2.  $2x(x - 1)y' + (2x - 1)y = 4x^2 - 3x$
3.  $x(x - 1)y' + y = x$

**Exercice 6.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.  $y'' + y = \cos^2(x)$
2.  $y'' - 6y' + 9y = (3x^2 + 1) e^x$
3.  $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$
4.  $4y'' + 4y' + y = x^2 + 8x + 9$
5.  $y'' + 2y' = 2x^2$
6.  $y'' - 3y' + 2y = \sin(x) + e^x$

**Exercice 7.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Trouver les applications  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$$

**Exercice 8.** Mouvement oscillatoire à une dimension (ressort de raideur  $k > 0$ , masse  $m$ , frottement  $c \geq 0$ )

L'équation du mouvement est :  $my'' + cy' + ky = f(t)$  où  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

1. Résoudre l'équation dans le cas des oscillations libres i.e. lorsque  $f$  est nulle
2. Résoudre dans le cas d'oscillations forcées de la forme :  $f : t \mapsto A \cos(\omega t)$
3. Mettre en évidence le phénomène de résonance

**Exercice 9.** Chute libre avec frottement Un objet de masse  $m$  est lâché sans vitesse initiale. Il est soumis à la pesanteur et à une force de résistance de l'air proportionnelle à sa vitesse.

1. Déterminer l'équation du mouvement (relation fondamentale de la dynamique)
2. Intégrer cette équation différentielle. Comportement de la vitesse en  $+\infty$ .

**Exercice 10.** Cinétique chimique On met en contact à l'instant  $t = 0$ ,  $a$  moles du corps A avec  $b$  moles du corps B. Ces deux corps réagissent suivant :  $A + B \rightarrow C$ . On suppose que la réaction est d'ordre 1 en A et 1 en B, i.e. en notant  $x(t)$  le nombre de moles de C produites jusqu'à l'instant  $t$ ,  $x'(t) = k(a - x(t)) \times (b - x(t))$  (remarquer qu'il s'agit d'une équation à variables séparable)

Déterminer  $x(t)$  en supposant successivement  $a = b$  puis  $a > b$