CALCULS ALGEBRIQUES

A MODES DE RAISONNEMENT

On présente dans ce chapitre, les modes de raisonnement usuels. Dans la suite le terme de proposition, ou assertion, désigne un énoncé mathématique qui peut prendre 2 valeurs : Vrai ou Faux

I) Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que la proposition P est fausse et trouver une contradiction avec des résultats obtenus.

Exemple : On veut montrer qu'il n'y a pas d'entier naturel plus grand que les autres.

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel N plus grand que les autres. La somme de deux entiers naturels étant un entier naturel, N + 1 est un entier naturel. Mais comme 1>0, on a N+1 > N. Ainsi, N n'est pas plus grand que tous les entiers naturels : Contradiction.

Aussi, il n'y a pas d'entier naturel plus grand que tous les autres

II) Raisonnement par contraposition

On a deux propositions P et Q. On veut montrer l'implication $P \Rightarrow Q$, c'est-à-dire " si P est vraie alors Q est vraie". Le raisonnement par contraposition consiste à constater que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la proposition "si Q est fausse, alors P est fausse".

Attention à ne pas confondre contraposition et absurde…

Exemple : Soit n un entier naturel. On veut montrer "n^2 pair $\Rightarrow$ n pair"

La contraposition affirme : " n impair $\Rightarrow$ n^2 est impair" .

Prenons donc n un entier impair. Il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k un entier naturel. Mais alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ est impair

III) Raisonnement par analyse-synthèse

On considère un problème. On veut déterminer les solutions de ce probleme.

Le principe de cette démonstration s'effectue en deux phases :

- phase d'analyse. On suppose le problême résolu, et on trouve des conditions nécessaires sur les solutions.
- phase de synthèse. On reprend les conditions nécessaires obtenues dans l'analyse, et on vérifie qu'elles sont suffisantes pour résoudre le problême.

Exemple : Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit f cette fonction.

Analyse : Si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 paire et f_2 impaire. Alors : $\forall x \in I$, $f(-x) = f_1(x) - f_2(x)$ car f_1 paire et f_2 impaire. Ainsi : $\forall x \in I$, $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

Synthèse : Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur I par :
$\forall x \in I$, $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

On vérifie aisément que : $f = f_1 + f_2$, que f_1 est paire et que f_2 est impaire

IV) Raisonnement par récurrence

On suppose connues les opérations élémentaires sur $\mathbb{N}$.

De l'axiomatique de PEANO, il ressort les axiomes et propriétés (admises) suivantes :

- $\mathbb{N}$ a un plus petit élément : 0 mais pas de plus grand élément
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément

Théorème : Principe de récurrence.
Soit P(n) une proposition portant sur un entier $n\in\mathbb{N}$. Soit $n_0 \in\mathbb{N}$. Si P vérifie :

- **$P(n_0)$ est vraie** (initialisation)
- **$\forall n \geq n_0$, $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie** (hérédité)

Alors $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ vraie

Dem: Soit $A = \{ n\in\mathbb{N} \mid n \geq n_0 , P(n) \text{ fausse} \}$

Supposons par l'absurde que A soit non vide .

A est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc d'après une des propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$, A admet un plus petit élément que l'on note a. On a: $\mathbf{a \in A}$

Comme $a\in A$, $a \geq n_0$. Or $P(n_0)$ est vraie (initialisation) donc $a \neq n_0$. Ainsi $a > n_0$

Mais alors $a - 1$ est un entier supérieur ou égal à n_0 et a-1 ne peut pas appartenir à A car le plus petit élément de A est a. Aussi $P(a - 1)$ est vraie.

Mais alors on a $a - 1 \geq n_0$ et $P(a - 1)$ est vraie (♣) donc d'après le propriété d'hérédité, P(a) doit également être vraie. En particulier $\mathbf{a \notin A}$

On obtient à la fois une propriété ($a \in A$) et son contraire : Impossible.

Donc l'hypothèse initiale est fausse : A est vide, i.e., $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ vraie

Théorème : Récurrence forte (ou avec prédécesseurs)
Soit P(n) une proposition portant sur un entier $n\in\mathbb{N}$. Soit $n_0 \in\mathbb{N}$. Si P vérifie :

- **$P(n_0)$ est vraie**
- **$\forall n \geq n_0$, $(\forall k\in\{n_0,..,n\}, P(k) \text{ vraie}) \Rightarrow P(n+1)$ vraie**

Alors $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ vraie

Dem: Même que précédemment si ce n'est que l'on change la ligne ♣ par : on a $a-1 \geq n_0$ et $\forall k \in\{n_0,..,a-1\}$ P(k) est vraie

Exercice: Montrer le principe de récurrence double : Si P(1) et P(2) vraies et si $\forall n\geq 1$, (P(n) et P(n+1) vraies) $\Rightarrow$ P(n+2) vraie, alors $\forall n\geq 1$, P(n) vraie

B SOMMES ET PRODUITS

I) Somme et produit

On considère un ensemble fini non vide I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note :

- $\sum_{i\in I} a_i$ la somme de tous les termes de cette famille finie
- $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de tous les termes de cette famille finie

Dans le cas particulier où $I = [\![1, n]\!]$, on note la somme sous la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ et on a donc $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ et le produit $\prod_{i=1}^{n} a_i$ et on a donc $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

Plus généralement, lorsque $I = [\![m, n]\!]$ avec m et n deux entiers tels que $m \leq n$, on a $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ et $\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$

Par convention, on pose que si I est vide, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$

Remarque : Dans toutes les sommes ci-dessus, la variable utilisée, ici i, est dite "muette" car elle peut être remplacée par toute autre variable … autre que celles intervenant pour déterminer les bornes.

Proposition : Règles de calculs pour les sommes.

a) Soit I un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes et λ un nombre réel ou complexe. Alors

$$\sum_{i\in I} (a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} (\lambda\, a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$$

b) Soit I et J deux ensembles finis et disjoints. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i$$

Proposition : Règles de calculs pour les produits.

a) Soit I un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes et λ un nombre réel ou complexe. Alors

$$\prod_{i\in I}(a_i\times b_i)=\prod_{i\in I}a_i\times\prod_{i\in I}b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I}(\lambda\, a_i)=\lambda^p\prod_{i\in I}a_i$$ **où p est le nombre d'éléments de I**

b) Soit I et J deux ensembles finis et disjoints. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$. Alors

$$\prod_{i\in I}a_i\times\prod_{i\in J}a_i=\prod_{i\in I\cup J}a_i$$

Remarque : Sommes et produits télescopiques Les propositions précédentes, permettent de simplifer certaines sommes classiques (et certains produits) dites télescopiques.

On a ainsi : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_m$ et $\displaystyle\prod_{i=m}^{n}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)=\frac{a_{n+1}}{a_m}$

II) Sommes usuelles

Proposition : Somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors, si p et m sont deux entiers tels que $p\le m$, $\displaystyle\sum_{i=p}^{m}u_i=\frac{u_p+u_m}{2}\times(m-p+1)$ (moyenne des deux extrèmes × nombre de termes)

b) En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,(n+1)}{2}$

Dem: On constate que $\displaystyle\sum_{i=p}^{m}u_i=\sum_{i=p}^{m}u_{p+m-i}$. Mais pour tout i, $u_{p+m-i}+u_i=u_p+u_m$ car la suite est arithmètique. On en déduit le résultat annoncé

Proposition : Somme des premiers carrés, des premiers cubes.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

Dem: On peut procéder par récurrence, ou en utilisant les sommes télescopiques associées aux familles de termes $(k+1)^3-k^3$ et $(k+1)^4-k^4$

Proposition : Somme des premiers termes d'une suite géométrique.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, si p et m sont deux entiers tels que $p \leq m$, $\sum_{i=p}^{m} u_i = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

b) En particulier : si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Dem: Si S est la somme recherchée, on simplifie la différence q S – S, qui peut s'exprimer comme une somme télescopique.

Identité remarquable

Propriété : Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} \times (a-b)$$

Dem: On développe le produit $(a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}$

On a : $(a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a\, a^k\, b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} b\, a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\, b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n+1-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$

De même on a : $a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} \times (a-b)$

III) Sommes doubles

On considère deux ensembles finis I et J et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note : $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ la somme de tous les termes de cette famille

En particulier, si $I = [\![m, n]\!]$ et $J = [\![p, q]\!]$ avec m, n, p et q quatre entiers tels que $m \leq n$ et $p \leq q$, la somme double est notée : $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} a_{i,j}$

Proposition : Interversion du signe Σ pour une somme indexée sur un rectangle

Soit $I = [\![m, n]\!]$ et $J = [\![p, q]\!]$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes. Alors $\sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$

Dem: On écrit les termes dans un tableau et on effectue les sommes sur les lignes et sur les colonnes. Puis on écrit que la somme totale est soit la somme de toutes les sommes partielles sur les lignes soit la somme de toutes les sommes partielles sur les colonnes.

Proposition : Produit de deux sommes finies

Soit $I = [\![m, n]\!]$ et $J = [\![p, q]\!]$ et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de nombres réels ou complexes. Alors $\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=p}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_i b_j$

Dem: On applique le résultat précédent à la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$

Somme triangulaire

On considère un ensemble fini I de la forme $I = \{(i,j);\ m \leq i \leq j \leq n\}$ avec m et n deux entiers, et soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note $\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j}$ la somme de tous les termes de cette famille.

Proposition : Interversion du signe Σ pour une somme indexée sur un triangle

Soit $I = \{(i,j);\ m \leq i \leq j \leq n\}$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. Alors $\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n} \sum_{i=m}^{j} a_{i,j}$

Dem: On écrit les termes dans un tableau et on effectue les sommes sur les lignes et sur les colonnes. Puis on écrit que la somme totale est soit la somme de toutes les sommes partielles sur les lignes soit la somme de toutes les sommes partielles sur les colonnes.

C COEFFICIENTS BINOMIAUX

I) Factorielle et coefficients binomiaux

Définition: Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle "**factorielle n**", notée n!, le nombre : $n! = \prod_{k\in[\![1,n]\!]} k$

Pour n = 0, on a n ! = 1 et si $n \geq 1$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque On peut définir les factorielles par récurrence : $\forall n$, $(n+1)! = (n+1)\times n!$ avec $0! = 1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Définition: Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. On appelle "**coefficient binomial d'ordre (p,n)**", et on note $\binom{n}{p}$, le nombre : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

Remarque On peut convenir que, pour p<0 ou p > n, $\binom{n}{p} = 0$

Remarque $\binom{n}{p}$ dénombre le nombre de chemins réalisant p succès sur un arbre modélisant les résultats obtenus au cours de *n* répétitions ou le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

II) Propriétés des coefficients binomiaux

Propriétés: (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ **(ii) Formule de symétrie** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

(iii) Formule de Pascal $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ $n \geq 2$ **et** $1 \leq p \leq n-1$

Dem: (i), (ii) et (iii) sont simples à établir par le calcul. On peut donner une démonstration ensembliste du (ii) : en effet il y a autant de parties à p éléments que de parties à n-p éléments car à une partie à p éléments correspond une et une seule partie à n-p éléments : son complémentaire.

(iii) Soit a un élément de E. Les parties à p éléments de E sont les parties à p éléments de E\{a} (qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$) et les parties à p-1 éléments de E\{a} auxquelles on ajoute a (et qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$)

Triangle de Pascal

On utilise la relation de Pascal (v) pour calculer les coefficients binomiaux de proche en proche

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

III) Formule du binôme

Formule du binôme

Propriété : Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \quad \text{avec la convention : } a^0 = 1 = b^0$$

Dem: On procède par récurrence sur n.

On constate d'abord que si $a \times b = b \times a$, alors $(a^p \times b^q) \times a = a^{p+1} \times b^q$

Soit P_n : " $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$ "

- P_1 est clairement vraie
- Si P_n est vraie. On a : $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} (a+b)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} a + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

Donc P_{n+1} est vraie

Aussi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, P_n vraie

D) SYSTEMES LINEAIRES

I) Définition

Définition: Un **système** d'équations linéaires est un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \quad\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

. Les éléments $a_{k,i}$ sont les **coefficients** réels ou complexes, les éléments b_k (réels ou complexes) forment le **second membre**, les x_i sont les **inconnues** (réelles ou complexes).

Le système (S) est dit **à n équations et à p inconnues.**

On appelle **système homogène associé à (S)** le système (S^*) ayant les mêmes coefficients mais où le second membre est nul

But : Trouver l'ensemble des familles solutions (qui peut être vide).

Notation Le système (S) $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \quad\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$ étant donné, on appelle le tableau $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ matrice du système (S), $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ le second membre. On pourra également noter le système (S) sous la forme $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$

Interprétation géométriques:

1) Pour p = 2

Les équations $a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 = b_i$ sont des équations de droite du plan (lorsque $a_{i,1}$ et $a_{i,2}$ ne sont pas tous nuls). Ainsi, le système (S) revient à rechercher l'intersection de n droites.

2) Pour p = 2

Les équations $a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + a_{i,3}\,x_3 = b_i$ sont des équations de plan (lorsque $a_{i,1}$, $a_{i,2}$ et $a_{i,3}$ ne sont pas tous nuls). Ainsi, le système (S) revient à rechercher l'intersection de n plans.

II) Structure de l'ensemble des solutions

On considère (S) un système linéaire et (S^*) le système homogène associé. On note **S** l'ensemble des solutions de (S) et $\mathbf{S_0}$ l'ensemble des solutions de (S^*)

1) Solutions d'un système linéaire homogène

Théorème: L'ensemble $\mathbf{S_0}$ des solutions du système linéaire homogène (S^*) est non vide et il est stable par addition et par mulitplication par une constante.

Dem: On vérifie aisément que (0, 0, …, 0) est solution de (S^*) ainsi que les stabilités énoncées.

2) Solutions d'un système linéaire

Théorème: L'ensemble S des solutions du système linéaire (S) peut être vide ou non. S'il n'est pas vide et que x^0 est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) vérifie : $\forall x \in K^p$, x solution de (S) $\Leftrightarrow x - x^0$ est solution de (S^*)

Dem: On utilise la "linéarité" du système.

Remarque Lorsque (S) est un système de (2, 2) de déterminant non nul, (S) pssède une et une seule solution (car correspond à l'intersection de 2 droites non parallèles du plan

III) Algorithme du pivot

Définition: Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes sont:

1) **les transvections**: addition d'une multiple d'une ligne à une autre: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
2) **les dilatations**: multiplication d'une ligne par un scalaire non nul: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
3) **les transpositions**: échange de deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$

Remarque Si (S) est un système linéaire et qu'on lui fait subir un certain nombre d'opérations élémentaires successives et que l'on obtient le système (S'), alors (S) et (S') ont les mêmes solutions : on dit que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.

Algorithme du pivot La méthode du pivot consiste à transformer par opérations élémentaires, un système linéaire en un autre système linéaire "plus simple" par exemple triangulaire $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)$ ou échelonné $\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} & \cdots & a_{1,n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ & & & a_{r,r} & \cdots & a_{r,r} & b_r \end{array}\right)$ où tous les coefficients $a_{j,j}$ sont non nuls.

Pour ce faire, on part du système (S). Dans ce système, on met, à l'aide d'ue transposition par exemple, en première ligne une équation ayant un coefficient non nul pour l'inconnue x_1 (ce coefficient sera appelé le premier pivot) et, par transpositions, on élimine cette inconnue de toutes les autres équations. Ensuite on réitère le processus sur les lignes sous la ligne L_1 etc… Quitte, éventuellement, à changer l'ordre des inconnues, on arrivera toujours à un système échelonné ou à un système incompatible.

Exemple: Soit à résoudre (S):

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = a \\ 2y + 2z = b \\ z = c - a \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = a \\ 2y = 2a + b - 2c \\ z = c - a \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = c - \frac{1}{2}b \\ y = a + \frac{1}{2}b - c \\ z = c - a \end{cases}$$