MPSI 15-16 Feuille n° 06 : Raisonnements

Du 08/10/15 au 15/10/15

Exercice 1. En raisonnant par contraposition, montrer que si n_1, n_2, ..., n_9 sont 9 entiers naturels tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale Ã 30

Exercice 2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 3. En raisonnant par analyse-synthêse, déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)f(y) = f(x\ y) + x + y$. (On pourra montrer que si f est solution, $f(0) = 1$)

Exercice 4. En raisonnant par analyse-synthêse, montrer que toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 5. Montrer : **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 6. Soit une propriété de récurrence $P(n)$ vérifiant : $P(0)$ et $P(1)$ vraies et pour tout entier naturel n, " $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies " entraine " $P(n+2)$ vraie" . Montrer que pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - (\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right)$. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes : **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$ **b)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)\,j$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\ j$ **d)** $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} (i+j)$ **e)** $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} i\ j$ **f)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$ **g)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ **h)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^j$

Exercice 9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 10. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2\ k)! \geqslant ((n+1)!)^n$

Exercice 11. En utilisant une récurrence, calculer $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 12. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :
$n = 2^p\,(2q+1)$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 13. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k)! \leqslant (n+1)!$

Exercice 14. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \leqslant n! \leqslant n^n$

Exercice 15. En utilisant une récurrence, calculer $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k\ k!)$