Devoir surveillé N° 2 (4 heures)

Ce devoir est constitué de quatre exercices et de deux petits problèmes. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = \arcsin(\sin(x)) + \dfrac{1}{2}\arccos(\sin(2x))$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(\sin(x)) + \dfrac{1}{2}\arccos(\sin(2x))$

1. Rappeler les domaines de définition des fonctions arcsin et arccos et donner une relation liant $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$.
2. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Etudier les périodicité et parité éventuelles de f. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point d'abscisse 0.
3. (a) Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ lorsque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
   (b) Faire de même pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$, et pour $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.
4. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sur une période (Il n'est pas dit que cette expression simplifiée est la même sur toute la période)
5. Tracer la courbe représentative de f sur au moins trois périodes.

Exercice 2 : Simplification d'une somme d'arctan

1. (a) Montrer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ est strictement supŕieur à $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Montrer que $\tan(\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8))$ existe et en donner une expression simplifiée sans arctan
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
2. On veut obtenir le même résultat par une autre méthode
   (a) Exprimer un argument du nombre complexe $1 + 2i$ sous la forme $\arctan(n)$ où n est un réel simple. Déterminer de même des arguments simples des nombres $1 + 5i$ et $1 + 8i$.
   (b) Déterminer un nombre complexe dont un argument est $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
   (c) En déduire $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 3 : Famille d'intégrales

Pour tout réel x et tout entier strictement positif k, on pose : $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

1. Calculer $I_1(x)$ (On pourra faire le changement de variables : $u = e^t$)
2. Calculer $I_2(x)$.
3. (a) En intégrant par parties, trouver une relation entre $I_{k+2}(x)$ et $I_k(x)$. (Remarquer $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$)
   (b) En déduire $I_3(x)$ et $I_4(x)$
4. On suppose que $I_k(x)$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $J_k = \lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x)$.
   (a) Déterminer une relation liant J_{k+2} à J_k.
   (b) Calculer J_1, J_2, J_3 et J_4

Exercice 4 : Calcul d'intégrales

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2 \arctan(x)$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+\text{th}(t)}$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{63} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}}$. On pourra poser $x = \sqrt[6]{1+t}$

Probleme I : Autour de la fonction arctan

1. **Quelques propriétés de la fonction** arctan**.**
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Que dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_-^*$?
   (b) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$
      i. Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
      ii. Déterminer le domaine de définition de h ainsi que le dommaine sur lequel h est dérivable.
      iii. Montrer que h est constante sur chaque intervalle constituant son domaine de définition. Déterminer les valeurs de ces constantes sur ces intervalles.
2. **Étude de la fonction** $x \longmapsto 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{2x}{3}\right)\right)$
   On définit la fonction f par : $f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{2x}{3}\right)\right)$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
   (b) Etudier les périodicité et parité éventuelles de f.
   (c) Etudier la dérivabilité de f et montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{5}{3} - \cos(f(x))$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.

Probleme II : Familles d'intégrales

Dans ce problème, p et q désignent des entiers naturels.

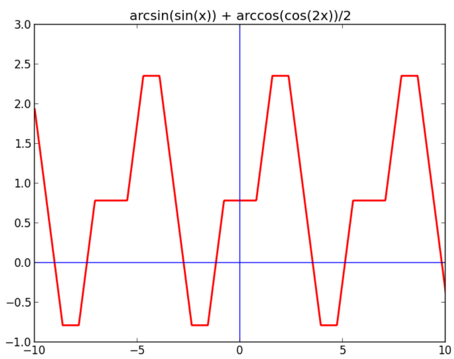
1. On considère, pour tout $p \geqslant 0$, les intégrales : $\displaystyle I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$
   (a) Calculer I_0 et I_1
   (b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3.
2. Soit $\displaystyle J_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$
   (a) Calculer $J_{1,q}$ en fonction de q.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation liant $J_{0,q+1}$ et $J_{0,q}$.
   En déduire les valeurs de $J_{0,q}$ pour $0 \leqslant q \leqslant 3$.
   (c) Déterminer l'existence (et la valeur) de deux réels α et β tels que, pour tous entiers p et q avec $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 1$, $J_{p,q} = \alpha J_{p-2,q-1} + \beta J_{p-2,q}$.
   (d) Donner toutes les valeurs des $J_{p,q}$ pour $0 \leqslant p \leqslant 3$ et $0 \leqslant q \leqslant 3$. On pourra regrouper les résultats dans un tableau

<u>Exercice 1</u> : Etude de la fonction $f(x) = \arcsin(\sin(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\sin(2x))$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(\sin(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\sin(2x))$

1. arcsin et arccos sont définies sur $[-1,1]$ et vérifie : $\boxed{\forall x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$
2. $\boxed{\textbf{$f$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}$, est 2π-périodique}}$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x)$. Ainsi $\boxed{\textbf{le graphe de f est symétrique par rapport au point de coordonnées } \left(0, \frac{\pi}{4}\right)}$. Ainsi on étudiera sur $[0,\pi]$ et on complétera par la symétrie mise en évidence et par translations successives.
3. (a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, x et $2x$ sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   donc $\arcsin(\sin(x)) = x$ et $\arccos(\sin(2x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(2x)) = \frac{\pi}{2} - 2x$.
   Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f(x) = \frac{\pi}{4}}$

   (b) Faire de même pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, et pour $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.
   - Pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
     donc $\arcsin(\sin(x)) = x$ et $\arccos(\sin(2x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(2x)) = -\frac{\pi}{2} + 2x$.
     Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = 2x - \frac{\pi}{4}}$
   - Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $2x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
     donc $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$ et $\arccos(\sin(2x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(2x)) = -\frac{\pi}{2} + 2x$.
     Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], f(x) = \frac{3\pi}{4}}$
   - Pour $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $2x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
     donc $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$ et $\arccos(\sin(2x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(2x)) = \frac{5\pi}{2} - 2x$.
     Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right], f(x) = \frac{9\pi}{4} - 2x}$
4. La période de f étant 2π et puisque l'on connait f sur $[0,\pi]$, il ne reste plus qu'à trouver $f(x)$ pour $x \in [-\pi, 0]$. Comme on a $f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x)$, on en déduit :
   - $\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right], f(x) = \frac{\pi}{4}}$
   - $\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], f(x) = \frac{3\pi}{4} + 2x}$
   - $\boxed{\forall x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right], f(x) = -\frac{\pi}{4}}$
   - $\boxed{\forall x \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right], f(x) = -\frac{7\pi}{4} - 2x}$



5. On a le graphe :

Exercice 2 : Simplification d'une somme d'arctan

1. (a) On a arctan strictement croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) < \arctan(2) < \arctan(5) < \arctan(8) < \frac{\pi}{2}$ et donc $\boxed{\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[}$

   (b) Puisque $\arctan(2)+\arctan(5)+\arctan(8) \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)\right)$ existe.
   D'autre part $\tan\left(\arctan(2) + \arctan(5)\right) = \dfrac{2+5}{1-2\times 5} = -\dfrac{7}{9}$ et donc
   $\tan\left(\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)\right) = \dfrac{8-\frac{7}{9}}{1+8\times\frac{7}{9}} = \dfrac{65}{65} = 1$:
   $\boxed{\tan\left(\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)\right) = 1}$

   (c) On en déduit que $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$. Comme $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on en déduit $\boxed{\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) = \frac{5\pi}{4}}$.

2. On veut obtenir le même résultat par une autre méthode

   (a) $\boxed{\arg(1+2i) = \arctan(2)\ ,\ \arg(1+5i) = \arctan(5)\ ,\ \arg(1+8i) = \arctan(8)}$.

   (b) Un argument d'un produit est la somme des arguments donc,
   $\boxed{(1+2i)(1+5i)(1+8i)\ \textbf{a pour argument}\ \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)}$.

   (c) Comme $(1+2i)(1+5i)(1+8i) = -65 - 65i$ est d'argument $\frac{\pi}{4}$ à π près et $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$, et que $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on retrouve $\boxed{\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) = \frac{5\pi}{4}}$

Exercice 3 : Famille d'intégrales

Pour tout réel x et tout entier strictement positif k, on pose : $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

1. Dans $I_1(x)$, on pose $u = e^t$. On trouve : $I_1(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2\,du}{u^2+1} = 2\Big[\arctan(u)\Big]_1^{e^x}$.

   Donc $\boxed{I_1(x) = 2\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}}$.

2. $I_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \Big[\operatorname{th}(t)\Big]_0^x$. Donc $\boxed{I_2(x) = \operatorname{th}(x)}$.

3. (a) $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}dt = \left[\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\right]_0^x + (k+1)\int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{k+2} t}dt = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)\left(I_k(x) - I_{k+2}(x)\right)$.

   Ainsi : $\boxed{I_{k+2}(x) = \dfrac{k}{k+1}I_k(x) + \dfrac{1}{k+1}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{k+1} x}}$

   (b) On en tire $\boxed{I_3(x) = \arctan\left(e^x\right) - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}\ \textbf{et}\ I_4(x) = \dfrac{2}{3}\operatorname{th}(x) + \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}^3 x}}$

4. On suppose que $I_k(x)$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $J_k = \lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x)$.

   (a) Comme $\operatorname{ch}(x) > |\operatorname{sh}(x)|$ et $\operatorname{ch}(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on a : $\boxed{J_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}J_k}$.

(b) En passant à la limite dans les expressions vues en 1 et 2, on trouve $\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_2 = 1}$.

Donc, en utilisant la relation de récurrence, on obtient $\boxed{J_3 = \frac{\pi}{4} \text{ et } J_4 = \frac{2}{3}}$

Exercice 4 : Calcul d'intégrales

1. Par IPP : $\displaystyle\int_0^x t^2 \arctan(t)\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\arctan(t)\right]_0^x - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t^3}{t^2+1} dt = \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\int_0^x \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt.$

   Donc $\boxed{\text{un primitive de } x \longmapsto x^2\arctan(x) \text{ est } x \longmapsto \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)}$.

2. On pose $u = e^t$ et on obtient :

   $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+\text{th}(t)} = \int_1^2 \frac{u^2+1}{2u^2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\left[\ln(u) - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2$. Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+\text{th}(t)} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3}{16}}$

3. On pose $x = \sqrt[6]{1+t}$ et on obtient :

   $\displaystyle\int_0^{63} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}} = \int_1^2 \frac{6u^5}{u^3+u^2} du = \int_1^2 \frac{6u^3}{u+1} du = 6\int_1^2 \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right) du.$

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{63} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}} = 11 - 6\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

Probleme I : Autour de la fonction arctan

1. **Quelques propriétés de la fonction** arctan.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $A = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $B = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. On a $(A,B) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$ et $\tan(A) = \tan(B) = \frac{1}{x}$. Donc, par injectivité de tan sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $A = B$. Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$.

   Comme arctan est impaire, on en déduit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}}$

   (b) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$

   i. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\frac{3\pi}{4} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} h(x) = \frac{\pi}{4}}$.

   ii. $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$ car composée de fonctions partout dérivables

   iii. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, h'(x) = 0$ donc $\boxed{h \text{ est constante sur }]-\infty, 1[\text{ et sur }]1, +\infty[}$. Etant données les limites calculer à la question précédente, on en déduit :

   $\boxed{\forall x < 1, h(x) = \frac{\pi}{4}}$ et $\boxed{\forall x > 1, h(x) = -\frac{3\pi}{4}}$

2. **Étude de la fonction** f **:** $x \longmapsto 2\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

   (a) $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}\right[}$.

   (b) $\boxed{f \text{ est } \frac{3\pi}{2}\text{−périodique et impaire}}$.

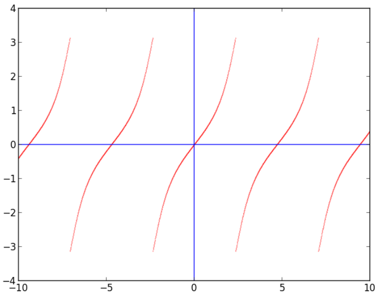
(c) f est dérivable sur $\mathscr{D}$ car composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. De plus :
$\forall x \in \mathscr{D}, f'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{1+\left(\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2}$. Or $\cos(f(x)) = \cos(2\arctan(t)) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ avec $t = \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

Donc $f'(x)+\cos(f(x)) = \dfrac{2}{3}\dfrac{1+\left(\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2} + \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2} = \dfrac{5}{3}\dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2} = \dfrac{5}{3}$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \dfrac{5}{3} - \cos(f(x))}$.

(d) On en déduit que f est croissante sur chaque intervalle constituant $\mathscr{D}$.

x	0	$+\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$0 \nearrow \pi$	$\Vert$



Probleme II : Familles d'intégrales

Dans ce problème, p et q désignent des entiers naturels.

1. On considère, pour tout $p \geqslant 0$, les intégrales : $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$

   (a) $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{4} \text{ et } I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}}$

   (b) $\boxed{I_p + I_{p+2} = \dfrac{1}{p+1}}$. Donc $\boxed{I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4} \text{ et } I_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln(2)}{2}}$.

2. Soit $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$

   (a) $\boxed{J_{1,0} = \dfrac{1}{2},\ J_{1,1} = \dfrac{1}{2}\ln(2) \text{ et, pour } q > 1,\ J_{1,q} = \dfrac{1}{(1-q)2^q} - \dfrac{1}{2(1-q)}}$

   (b) A l'aide d'une IPP, on trouve $\boxed{J_{0,q+1} = \dfrac{2q-1}{2q}J_{0,q} + \dfrac{1}{q2^{q+1}}}$.

   On en déduit $\boxed{J_{0,0} = 1,\ J_{0,1} = \dfrac{\pi}{4},\ J_{0,2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8} \text{ et } J_{0,3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3\pi}{32}}$

   (c) En écrivant $x^p = x^{p-2}(1+x^2) - x^{p-2}$, on trouve : $\boxed{\forall p \geqslant 2,\ \forall q \geqslant 1,\quad J_{p,q} = J_{p-2,q-1} - J_{p-2,q}}$
.

   (d)

$J_{0,0} = 1$	$J_{0,1} = \frac{\pi}{4}$	$J_{0,2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$	$J_{0,3} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$
$J_{1,0} = \frac{1}{2}$	$J_{1,1} = \frac{\ln(2)}{2}$	$J_{1,2} = \frac{1}{4}$	$J_{1,3} = \frac{3}{16}$
$J_{2,0} = \frac{1}{3}$	$J_{2,1} = 1 - \frac{\pi}{4}$	$J_{2,2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$	$J_{2,3} = \frac{\pi}{32}$
$J_{3,0} = \frac{1}{4}$	$J_{3,1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$	$J_{3,2} = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4}$	$J_{13,3} = \frac{1}{16}$