

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 4

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière au soin de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Equation différentielle linéaire du premier ordre

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + (x - 2)y = x - 2 \quad (1)$$

On cherche à étudier les courbes intégrales de cette équation tracées dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Vérifier que, parmi les courbes intégrales, il existe une droite et déterminer une équation de cette droite.
2. Intégrer l'équation différentielle (1).
3. Y-a-t-il des solutions sur \mathbb{R} ?

Dans toute la suite, on notera g_λ les solutions sur \mathbb{R} avec λ est égale à la limite du rapport $\frac{g_\lambda(x) - 1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

On notera (\mathcal{C}_λ) la courbe intégrale représentative de g_λ .

4. Etudier le comportement de g_λ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Par un point du plan M de coordonnées (a, b) , combien passe-t-il de courbes intégrales (\mathcal{C}_λ) ? Discuter selon les valeurs de a et de b .
6. Pour un λ fixé, quels sont les points de (\mathcal{C}_λ) où la tangente est horizontale ? Montrer que l'ensemble décrit par ces points lorsque λ décrit \mathbb{R} est la réunion de deux droites.
7. Quelle valeur faut-il donner à λ pour que l'axe des abscisses (Ox) soit tangent à (\mathcal{C}_λ) ? Calculer dans ce cas une valeur approchée de l'abscisse du point où (\mathcal{C}_λ) recoupe l'axe des abscisses. Discuter, suivant la valeur de λ , le nombre de points communs à l'axe (Ox) et à (\mathcal{C}_λ) .
8. Construire le faisceau des courbes intégrales (\mathcal{C}_λ) , c'est-à-dire, tracer sur un même graphe (et avec des couleurs différentes), des courbes (\mathcal{C}_λ) "caractéristiques" d'une situation concernant les branches infinies ou le nombre de points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
(on aura 5 courbes à tracer et on indiquera pour chacune quelle(s) valeur(s) de λ elle représente)