Devoir en temps libre n° 4

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Equation différentielle linéaire du premier ordre

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + (x-2)y = x-2 \tag{1}$$

On cherche à étudier les courbes intégrales de cette équation tracées dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Vérifier que, parmi les courbes intégrales, il existe une droite et déterminer une équation de cette droite.

2. Intégrer l'équation différentielle (1).

3. Y-a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

   Dans toute la suite, on notera g_λ les solutions sur $\mathbb{R}$ avec λ est égale à la limite du rapport $\dfrac{g_\lambda(x)-1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.
   On notera $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe intégrale représentative de g_λ.

4. Etudier le comportement de g_λ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Par un point du plan M de coordonnées (a, b), combien passe-t-il de courbes intégrales $(\mathscr{C}_\lambda)$? Discuter selon les valeurs de a et de b.

6. Pour un λ fixé, quels sont les points de $(\mathscr{C}_\lambda)$ où la tangente est horizontale ? Montrer que l'ensemble décrit par ces points lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est la réunion de deux droites.

7. Quelle valeur faut-il donner à λ pour que l'axe des abscisses (Ox) soit tangent à $(\mathscr{C}_\lambda)$?
   Calculer dans ce cas une valeur approchée de l'abscisse du point où $(\mathscr{C}_\lambda)$ recoupe l'axe des abscisses.
   Discuter, suivant la valeur de λ, le nombre de points communs à l'axe (Ox) et à $(\mathscr{C}_\lambda)$.

8. Construire le faisceau des courbes intégrales $(\mathscr{C}_\lambda)$, c'est-à-dire, tracer sur un même graphe (et avec des couleurs différentes), des courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ "caractéristiques" d'une situation concernant les branches infinies ou le nombre de points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
   (on aura 5 courbes à tracer et on indiquera pour chacune quelle(s) valeur(s) de λ elle représente)

CORRECTION

Problème : Equation différentielle linéaire du premier ordre

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + (x-2)y = x - 2 \tag{2}$$

1. On cherche une solution de la forme $y : x \longmapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   y solution de (1) $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + (ax+b)(x-2) = x - 2 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$
   Ainsi $\boxed{\text{la droite horizontale d'équation } Y = 1 \text{ est une courbe intégrale de } (1)}$.
2. Sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation homogène sont $x \longmapsto \gamma x^2 e^{-x}$.
   Ainsi $\boxed{\text{les solutions de } (1) \text{ sur } I \text{ sont } x \longmapsto \gamma x^2 e^{-x} + 1}$.
3. $\boxed{\text{Les fonctions définies par } \begin{cases} f(x) = \gamma x^2 e^{-x} + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = \beta x^2 e^{-x} + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ sont solutions de } (1) \text{ sur } \mathbb{R}}$

   On note $\boxed{g_\lambda \text{ la fonction } x \longmapsto \lambda x^2 e^{-x} + 1}$ et on note $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe intégrale représentative de g_λ.
4. En 0. $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda) \text{ admet la droite d'équation } Y = 1 \text{ pour tangente en } 0}$.
   En $+\infty$. $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda) \text{ admet la droite d'équation } Y = 1 \text{ pour asymptote en } +\infty}$
   En $-\infty$. $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda) \text{ possède une branche parabolique d'axe } (Oy) \text{ en } -\infty}$ sauf la courbe $(\mathscr{C}_0)$ qui est une droite horizontale... On a de plus $\lim\limits_{-\infty} g_\lambda = -\infty$ si $\lambda < 0$, $\lim\limits_{-\infty} g_\lambda = +\infty$ si $\lambda > 0$ et $\lim\limits_{-\infty} g_0 = 1$.
5. Soit M de coordonnées (a, b) et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $M \in (\mathscr{C}_\lambda) \iff b = g_\lambda(a) \iff b = 1 + \lambda a^2 e^{-a} \iff \lambda a^2 = (b-1)e^a$. Ainsi :
   Si $a = 0$ et $b = 1$ alors $\boxed{M(a,b) \text{ est sur toutes les courbes } (\mathscr{C}_\lambda)}$
   Si $a = 0$ et $b \neq 1$ alors $\boxed{M(a,b) \text{ est sur aucune courbe } (\mathscr{C}_\lambda)}$
   Si $a \neq 0$ alors $\boxed{M(a,b) \text{ est sur une et une seule courbe } (\mathscr{C}_\lambda) : \text{pour } \lambda = \dfrac{(b-1)e^a}{a^2}}$
6. Soit λ fixé. On cherche x tel que $g_\lambda'(x) = 0$ i.e. tel que $\lambda(2-x)xe^{-x} = 0$.
   Si $\lambda = 0$. alors $\boxed{\text{en tout point de } (\mathscr{C}_0) \text{ on a une tangente horizontale}}$

   Si $\lambda \neq 0$, les points de $(\mathscr{C}_\lambda)$ où on a une tangente horizontale sont $\boxed{A(0,1) \text{ et } B_\lambda\left(2, 1 + 4\lambda e^{-2}\right)}$
   Ainsi l'ensemble des points où on a une tangente horizontale lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est
   $\boxed{\text{la réunion de la droite } Y = 1 \text{ et la droite } X = 2}$
7. $\boxed{(Ox) \text{ est tangent à } (\mathscr{C}_\lambda) \text{ si et seulement si } \lambda = \dfrac{e^2}{4}}$. Cette courbe intégrale recoupe l'axe (Ox) $\boxed{\text{en un point d'abscisse } x_1 \text{ négative de valeur approchée } -0.55692909 \text{ à } 10^{-8} \text{ près}}$
   .
   Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 e^{-x}$. Le nombre de points de $(\mathscr{C}_\lambda)$ sur l'axe des abscisses est égal au nombre de valeurs de x vérifiant $f(x) = -\dfrac{1}{\lambda}$. Or f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2-x)\,xe^{-x}$,

admet un minimum local en 0 (qui vaut 0) et un maximum local en 2 (qui vaut $4e^{-2}$), et admet 0 pour limite en $+\infty$, et $+\infty$ pour limite en $-\infty$. Ainsi :

Si $\lambda = -\frac{e^2}{4}$ alors $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda)\bigcap(Ox) \textbf{ est une paire de points : } (2,0),(x_1,0)}$

Si $\lambda < -\frac{e^2}{4}$ alors $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda)\bigcap(Ox) \textbf{ est un point}}$

Si $\lambda \leqslant 0$ alors $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda)\bigcap(Ox) = \emptyset}$

Si $0 > \lambda > -\frac{e^2}{4}$ alors $\boxed{(\mathscr{C}_\lambda)\bigcap(Ox) \textbf{ est constitué de trois points}}$

8. Faisceau des courbes intégrales $(\mathscr{C}_\lambda)$