Devoir en temps libre n° 5

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Exercice : Manipulation de sommes

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$.

2. Rappeler la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. A l'aide de la question précédente, en déduire la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

3. Conjecturer une formule générale pour $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\ldots(k+p)$ et la montrer par récurrence.

4. Écrire $\dfrac{S_n}{(p+1)!}$ sous forme d'une somme de n coefficients binomiaux et en déduire une deuxième façon de calculer S_n.

5. Développer $k\,(k+1)\,(k+2)\,(k+3)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$; on cherchera à factoriser le résultat.

Problème : Quelques résultats sur la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Déterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10})
Écrire un programme Python permettant de calculer le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci. Calculer F_n pour n égal á $100 - j - m$ où j est le jour de votre date de naissance et m le mois de naissance (indiquez ces données sur votre copie).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 6 \Longrightarrow F_n > n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 2 \Longrightarrow F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\,F_{n+1}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} F_k\,F_{k+1} = F_{2n}^2$.

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$

9. Montrer que, si on pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$

10. Montrer que, si on pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$