MPSI 15-16 Feuille n° 07 : Coefficients binomiaux et Systèmes linéaires

Du 15/10/15 au 04/11/15

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

1. $\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}=87n$
2. $\binom{n}{5}=17\binom{n}{4}$
3. $\binom{2n+4}{3n-1}=\binom{2n+4}{n}$

Exercice 2. En utilisant la formule de Newton sur $(1+x)^n$ avec des valeurs de x bien choisies ou en transformant (par exemple en dérivant), simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)\binom{n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0, u_1=1$ et la relation : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.
Montrer que : $\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_{p+k}=u_{p+2n}$

Exercice 4. Montrer que : $\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ p\leqslant n\Rightarrow\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$

1. par récurrence sur n avec p fixé.
2. en écrivant : $\binom{k+1}{p+1}=\binom{k}{p+1}+\binom{k}{p}$ pour $p+1\leqslant k\leqslant n$.

Exercice 5. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la somme double : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}$

Exercice 6. Résoudre les systèmes linéaires suivants, (discuter selon les valeurs de a, b et c) :

1. $\begin{cases}3x+y&=0\\6x+2y+z&=2\\9x+3y+7z&=14\end{cases}$
2. $\begin{cases}x-3y+z&=1\\2x+y-z&=-1\\x+11y-5z&=5\end{cases}$
3. $\begin{cases}2x+y-2z&=10\\3x+2y+2z&=1\\5x+4y+3z&=4\end{cases}$
4. $\begin{cases}2x+3y+z&=4\\x+y-2z&=1\\x+4y+z&=1\end{cases}$
5. $\begin{cases}x+y+z&=1\\x+2y+3z&=4\\3x+4y+5z&=a\end{cases}$
6. $\begin{cases}x+y+z&=a\\x+2y+3z&=b\\x+3y+4z&=c\end{cases}$
7. $\begin{cases}ax+y&=1\\x+ay&=1\end{cases}$
8. $\begin{cases}x+2y-3z&=4\\x+3y+z&=11\\2x+5y-4z&=13\\4x+11y&=37\end{cases}$
9. $\begin{cases}a\ x+y+3z&=3\\(a-1)x+a\ y+z&=1\end{cases}$