

MPSI 15-16 Feuille n° 08 : Nombres réels

Du 02/11/15 au 07/11/15

Exercice 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B = \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que B n'est pas majorée. En déduire :
 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon > M$. On dit alors que \mathbb{R} est archimédien

Exercice 2. Soit $(A, B) \in (P(\mathbb{R}))^2$ non vides et majorées. Montrer : **a)** $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$
b) $A \cup B$ est majoré et calculer $\sup(A \cup B)$ **c)** Que dire de $A \cap B$?

Exercice 3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sqrt{p} \in \mathbb{Q} \iff \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante, $f(\{0, 1\}) \cap \{0, 1\} = \emptyset$. Soit $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$

1. Montrer que A admet une borne supérieure α .
2. Montrer que α est un point fixe de f .
3. En déduire que si f est croissante de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, f admet un point fixe

Exercice 5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire : $\left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right]$

Exercice 6. Montrer que : **a)** $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$ **b)** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, [-x] = -[x] - 1$
c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x+y] - [x] - [y] \in \{0, 1\}$ **d)** $\forall (x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, [x+a] = [x] + a$

Exercice 7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{n+2}{6} \right] + \left[\frac{n+4}{6} \right] = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+3}{6} \right]$

Exercice 8. 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont irrationnels

Exercice 9. Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x] + [y] + [x+y] \leq [2x] + [2y]$

Exercice 10. Montrer : $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \left[\frac{n+m}{2} \right] + \left[\frac{n-m+1}{2} \right] = n$

Exercice 11. 1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 12. Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 0 < a \leq b \implies \frac{(b-a)^2}{8b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(b-a)^2}{8a}$

Exercice 13. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \left| \frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5} \right| \leq |x - \sqrt{5}|$

Exercice 14. Déterminer $\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left([x] + \left[\frac{1}{x} \right] \right)$

Exercice 15. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}^* \mid (1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Montrer : $\forall k \in [2, n-1], k(n-k+1) > n$.
En déduire : $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$