Devoir en temps libre n° 5

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Exercice : Manipulation de sommes

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$.

2. Rappeler la formule $\sum_{k=1}^{n} k$. A l'aide de la question précédente, en déduire la formule donnant $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

3. Conjecturer une formule générale pour $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\dots(k+p)$ et la montrer par récurrence.

4. Écrire $\dfrac{S_n}{(p+1)!}$ sous forme d'une somme de n coefficients binomiaux et en déduire une deuxième façon de calculer S_n.

5. Développer $k\,(k+1)\,(k+2)\,(k+3)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^4$; on cherchera à factoriser le résultat.

Problème : Quelques résultats sur la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Déterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10})
   Écrire un programme Python permettant de calculer le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci. Calculer F_n pour n égal á $100 - j - m$ où j est le jour de votre date de naissance et m le mois de naissance (indiquez ces données sur votre copie).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 6 \Longrightarrow F_n > n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 2 \Longrightarrow F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\,F_{n+1}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{2n-1} F_k\,F_{k+1} = F_{2n}^2$.

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \dbinom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$

9. Montrer que, si on pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$

10. Montrer que, si on pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

CORRECTION

Exercice : Manipulation de sommes

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ "

   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2$ et $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.
     Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$
     i.e. $\boxed{\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

2. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$. A la question précédente, on a montré : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
   donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$ i.e. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

3. On peut montrer par récurrence après l'avoir conjecturer, que :
   $\boxed{\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+p) = \frac{n(n+1)\cdots(n+p)(n+p+1)}{p+2}}$.

4. $\displaystyle\frac{S_n}{(p+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+p)!}{(k-1)!(p+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{p+k+1}{k-1} - \binom{p+k}{k-2}\right) = \binom{p+n+1}{n-1}$.
   Ainsi, $\boxed{\displaystyle S_n = (p+1)!\binom{p+n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)\cdots(n+p)(n+p+1)}{p+2}}$.

5. $k(k+1)(k+2)(k+3) = k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k$ donc
   $k^4 = k(k+1)(k+2)(k+3) - 6k(k+1)(k+2) + 7k(k+1) - k$. Ainsi
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - 6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + 7\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$
   D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$.

Problème : Quelques résultats sur la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. On a $\boxed{F_1 = 1\,, F_2 = 1\,, F_3 = 2\,, F4 = 3\,, F_5 = 5\,, F_6 = 8\,, F_7 = 13\,, F_8 = 21\,, F_9 = 34\,, F_{10} = 55}$

```python
def fibo_it(n):
  """calcul de F_n en iteratif"""
  Fcourant , Fprecedent = 1, 0
  if n < 2: return(n)
  for k in range(n-1):
    x = Fcourant
    Fcourant = Fprecedent + Fcourant
    Fprecedent = x
  return(Fcourant)
```

On trouve

$F_{60} = 1\,548\,008\,755\,920$, $F_{65} = 17\,167\,680\,177\,565$

$F_{70} = 190\,392\,490\,709\,135$, $F_{75} = 2\,111\,485\,077\,978\,050$

$F_{80} = 23\,416\,728\,348\,467\,685$, $F_{85} = 259\,695\,496\,911\,122\,585$

$F_{90} = 2\,880\,067\,194\,370\,816\,120$, $F_{95} = 31\,940\,434\,634\,990\,099\,905$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 6 \Longrightarrow F_n > n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $F_n > n \quad$ et $\quad F_{n+1} > n+1$"

   - $\mathscr{P}_6$ est-elle vraie ? On a : $F_6 = 8 > 6$ et $F_7 = 13 > 7$. Donc **$\mathscr{P}_6$ est vraie**
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 6$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $F_n > n$ et $F_{n+1} > n+1$. Ainsi $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} > 2n+1 > n+2$ car $n \geqslant 6 > 1$. Comme on a toujours $F_{n+1} > n+1$, on en déduit que **$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie**
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_6$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 6$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que **pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 6$, $\mathscr{P}_n$ est vraie** i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 6 \Longrightarrow F_n > n$

   On en déduit que **la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$** car elle est minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

3. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n \quad$ et $\quad F_{n+1} < F_{n+2} \leqslant 2F_{n+1}$"

   - $\mathscr{P}_2$ est-elle vraie ? On a : $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$. Donc on a bien $F_2 < F_3 \leqslant 2F_2$ et $F_3 < F_4 \leqslant 2F_3$ i.e. **$\mathscr{P}_2$ est vraie**
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n \quad$ et $\quad F_{n+1} < F_{n+2} \leqslant 2F_{n+1}$ donc en sommant, on trouve $F_{n+2} < F_{n+3} \leqslant 2F_{n+2}$. Comme on a toujours $F_{n+1} < F_{n+2} \leqslant 2F_{n+1}$, on en déduit que **$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie**
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_2$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que **pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ est vraie** i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \Longrightarrow F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$

4. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$"

   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k = 1$ et $F_3 - 1 = 1$ donc on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k = F_{1+2} - 1$ i.e. **$\mathscr{P}_1$ est vraie**
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$. Donc **$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie**
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

     pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ est vraie i.e. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

5. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\, F_{n+1}$ "

   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = 1$ et $F_1\, F_2 = 1$ donc on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1\, F_{1+1}$ i.e. $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\, F_{n+1}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = F_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\, F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}\,(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}\, F_{n+2}$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

     $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\, F_{n+1}}$

6. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} F_k\, F_{k+1} = F_{2n}^2$ "

   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k\, F_{k+1} = F_1\, F_2 = 1$ et $F_2^2 = 1$ donc on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k\, F_{k+1} = F_2^2$ i.e. $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} F_k\, F_{k+1} = F_{2n}^2$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} F_k\, F_{k+1} = \sum_{k=1}^{2n-1} F_k\, F_{k+1} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n}^2 + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n}\,(F_{2n} + F_{2n+1}) + F_{2n+1}F_{2n+2} = (F_{2n} + F_{2n+1})\, F_{2n+2} = F_{2n+2}^2$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$
   - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

     $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} F_k\, F_{k+1} = F_{2n}^2}$

7. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ "

   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $F_2 = 1$, $F_2^2 - F_0^2 = 1$ donc on a bien $F_2 = F_{1+1}^2 - F_{1-1}^2$. De même on trouve : $F_3 = 2 = F_{1+1}^2 + F_1^2$. Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$. Donc :
     * $F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 + F_n^2$
       Or : $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = (F_{n+1} - F_{n-1})\,(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1})$.
       D'où $F_{2n+2} = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} + F_n\,(F_n + F_{n-1})$
       $= F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1} = F_{n+2}^2 - F_n^2$
     * $F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n+2}^2 - F_n^2 = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$

     Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

- Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que
  $\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \textbf{ et } F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2}$

8. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$ "

- $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{2-k}{k} = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_3$ et
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{3-k}{k} = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_4$ donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \textbf{ est vraie}}$
- On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a :
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$.

  $$* \quad F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k}$$
  $$= \binom{n}{n} + \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{k}$$
  $$= \binom{n+1}{n+1} + \binom{2n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{2n+1-k}{k-1} + \binom{2n+1-k}{k} \right)$$
  $$= \binom{n+1}{n+1} + \binom{2n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+2-k}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{k}$$
  $$* \quad F_{2n+4} = F_{2n+2} + F_{2n+3} = \binom{2n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{2n+2-k}{k-1} + \binom{2n+2-k}{k} \right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+3-k}{k}$$

  Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$
- Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$
  i.e. $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1} \textbf{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}}$$

9. On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On montre aisément par récurrence :
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n}$

10. On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On montre aisément par récurrence double et en constatant que α et β sont racines de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}}$