MPSI 15-16 Feuille n° 09 : Suites numériques

Du 06/11/15 au 17/11/15

Exercice 1. Étudier :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k+n^2}\right)$

Exercice 2. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $0 < u_0 < u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda^n u_n$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
2. Montrer que : $\forall a \in [0,1], 1+a \leqslant e^a$
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant u_{n+1}(1+\lambda^n)$
4. Conclure quant à la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire la nature de : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$

Exercice 4. Montrer que : si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Étudier : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$

Exercice 5. Soit les suites de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$. Montrer que : $u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge.

Exercice 6. Soit : $v_0 > u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles ont la même limite l.

Exercice 7. Soit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi elle est stationnaire.

Exercice 8. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$. Étudier la convergence de ces suites et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de leur limite

Exercice 9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation "$x^n = 1-2x$ " possède une unique solution positive x_n. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$. En considérant $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$, étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 11. Soit : $v_0 > u_0 \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$. Montrer que les deux suites sont convergentes et ont la même limite l. Expliciter l en posant $u_0 = v_0 \cos(\phi)$

Exercice 12. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$

Exercice 13. Étudier les suites récurrentes définies par u_0 et les relations de récurrence :

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$
2. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+2}$
4. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3+u_n}$
5. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2+7u_n}{2}}$
6. $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1-\cos(u_n)$

Exercice 14. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!}$
2. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) u_n$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{3n^2}$

Exercice 15. Théorême de Cesaro Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On désire établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraine $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
2. Etablir que, pour tout entier $n > n_0$, on a :
   $|v_n - \ell| \leqslant \dfrac{|u_1-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n} + \dfrac{n-n_0}{n}\,\dfrac{\varepsilon}{2}$
3. En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraine $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$