Devoir surveillé N° 3 (4 heures)

Ce devoir est constitué de quatre exercices et d'un petit problème. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice n'est pas autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice 1 : Equations différentielles du premier ordre

1. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions : $x \mapsto y(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2x} \ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{\lambda}{x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E) : $y' + 2xy = -x$.
   En déterminer l'unique solution s'annulant en 0.

Exercice 2 : Equations différentielles du second ordre

Résoudre les équations diiférentielles linéaires du second ordre suivantes et pour chacune d'entre elles, on donnera la solution répondant aux conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

1. (E_1) : $y'' + 3y' + 2y = \left(3x^2 - 5\right) e^{-x} - 2xe^{-2x}$
2. (E_2) : $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x)$

Exercice 3 : Travail avec les symboles Σ et Π

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}} < \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{4k+1}{4k+3} < \sqrt{\dfrac{5}{4n+5}}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{(n+1)}$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $U = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(px)$ et $V = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px)$.
   (a) Donner une expression simplifiée de $U + iV$
   (b) En déduire des expressions simplifiées de U et de V.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |i-j|$
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$

Exercice 4 : Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants, (on discutera du nombre de solutions selon les valeurs de m dans le premier cas et selon les relations entre a, b et c dans le second cas) :

1. $\begin{cases} mx + y &= 2 \\ \left(m^2+1\right)x + 2my &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + 7z &= -1 \\ x + y + 4z &= 1 \\ 3x - 5y + 2z &= 9 \\ 2x + y - 5z &= -8 \end{cases}$

Probleme : Simplification de radicaux carrés

1. **Sommes d'irrationnels**

   (a) Soit α un nombre irrationnel positif

      i. Montrer que : $\forall (r,s) \in \mathbb{Q}^2,\ r\alpha = s \Longleftrightarrow r = s = 0$

      ii. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ avec c et d non nuls.
      Montrer que : $\dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow ad - bc = 0$

   (b) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{Q}^+\right)^2$ avec $x \neq y$, tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

      i. On considère les deux nombres réels $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y}$
      Montrer que leur produit est rationnel, et que leur somme est irrationnelle.
      En déduire qu'ils sont irrationnels.

      ii. Soit $(r,s) \in \left(\mathbb{Q}_+^*\right)^2$. Montrer que $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ est irrationnel

   (c) i. Montrer, par des exemples, que le produit de deux irrationnels peut être rationnel ou irrationnel.

      ii. Montrer, par des exemples, que la somme de deux irrationnels peut être rationnelle ou irrationnelle.

      iii. Déterminer, pour les nombres usivants, s'ils sont rationnels ou irrationnels : $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

2. **Simplification de radicaux carrés**
   Soient a et b deux rationnels positifs. On suppose que $\sqrt{b}$ est irrationnel. Nous voulons montrer que : $\exists (x,y) \in \left(\mathbb{Q}^+\right)^2 \,|\, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - b$ est le carré d'un élément de $\mathbb{Q}$.
   Pour cela, nous allons procéder par analyse-synthèse.

   (a) <u>Analyse</u>

      Supposons l'existence de deux rationnels positifs (x,y) tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$

      i. Montrer que $x + y = a$ et $xy = \dfrac{b}{4}$

      ii. Déterminer alors (x,y) en fonction de a et de b.

      iii. En déduire que $a^2 - b$ est le carré d'un rationnel.

   (b) <u>Synthèse</u>
      Supposons $a^2 - b$ soit le carré d'un rationnel

      i. Montrer qu'il existe deux rationnels positifs x et y tels que $x + y = a$ et $xy = \dfrac{b}{4}$

      ii. Montrer qu'alors $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$

   (c) On suppose ici de plus que $a^2 - b > 0$. Montrer que si $(x,y) \in \left(\mathbb{Q}^+\right)^2$ vérifie $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm\sqrt{a - \sqrt{b}}$

   (d) Simplifier les deux expressions suivantes : $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$ et $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

Exercice 1 : Equations différentielles du premier ordre

1. On pose y_λ mes fonctions définies par $y_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan x - \frac{1}{2x}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose (E) l'équation différentielle recherchée et (H) son équation homogène associée.
   La structure de l'ensemble des solutions de (E) permet d'affirmer que les solutions de (H) sont les fonctions $f_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda}{x}$.
   Or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\lambda'(x) = -\frac{\lambda}{x^2} = -\frac{1}{x}f_\lambda(x)$.
   Ainsi $\boxed{\textbf{les } f_\lambda \textbf{ sont les solutions de l'équation } (H) : x\,y' + y = 0}$
   D'autre part si on pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \arctan x - \frac{1}{2x}\ln\left(x^2+1\right)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{2x(1+x^2)} + \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)$
   D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xg'(x) + g(x) = \arctan(x)$
   Ainsi $\boxed{\textbf{les fonctions } y_\lambda \textbf{ sont les solutions de l'équation } (E) : x\,y' + y = \arctan(x)}$
2. Équation différentielle : $(E) : \quad y' + 2xy = -x$.
   $\boxed{\textbf{Les solutions de l'équation homogène associée sont } x \mapsto \lambda e^{-x^2} \textbf{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$
   On cherche ensuite une soultion particulière de (E) sous la forme : $f : x \to \lambda(x)e^{-x^2}$ avec λ dérivable. On trouve alors que f est solution de (E) sssi $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = -x\,e^{x^2}$. On peut donc choisir $\lambda(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$. Ainsi
   $\boxed{\textbf{les solutions de } (E) \textbf{ sont les fonctions } x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^{-x^2} \textbf{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$
   La solution du problème de Cauchy proposé est $\boxed{x \to \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - 1\right)}$

Exercice 2 : Equations différentielles du second ordre

1. $(E_1) : \quad y'' + 3y' + 2y = \left(3x^2 - 5\right)e^{-x} - 2xe^{-2x}$
   Les solutions de (E_1) sont de la forme $\boxed{x \mapsto \left(x^3 - 3x^2 + x\right)e^{-x} + \left(x^2 + 2x\right)e^{-2x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}}$.
   La solution du problème de Cauchy est $\boxed{x \mapsto \left(x^3 - 3x^2 + x - 3\right)e^{-x} + \left(x^2 + 2x + 3\right)e^{-2x}}$.
2. $(E_2) : \quad y'' - 2y' + 5y = e^x\sin(2x)$
   Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}$ est $x \to -\frac{ix}{4}e^{(1+2i)x}$. Donc : les solutions de (E_2) sont de la forme $\boxed{x \mapsto -\frac{x}{4}\cos(2x)e^x + +Ae^x\sin(2x) + Be^x\cos(2x)}$.
   La solution du problème de Cauchy est $\boxed{x \mapsto \frac{1}{8}\left(\sin(2x) - 2x\cos(2x)\right)e^x}$.

Exercice 3 : Travail avec les symboles Σ et Π

1. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ et $w_n = \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.
   Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ "
   - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ et $w_1 = \frac{7}{6}$, donc on a bien $u_1 \leqslant v_1 \leqslant w_1$ i.e. $\boxed{\mathscr{P}_1 \textbf{ est vraie}}$
   - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ donc $u_n + \sqrt{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant w_n + \sqrt{n+1}$. On va montrer que $u_{n+1} \leqslant u_n + \sqrt{n+1}$ et que $w_n + \sqrt{n+1} \leqslant w_{n+1}$.
     ✓ $u_n + \sqrt{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{3} - \frac{2n}{3}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} - n}{3\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \geqslant 0$
     Donc $u_{n+1} \leqslant u_n + \sqrt{n+1}$
     ✓ $w_{n+1} - w_n - \sqrt{n+1} = \frac{4n+1}{6}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - \frac{\sqrt{n}}{3} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2}{6\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \geqslant 0$
     Donc : $w_n + \sqrt{n+1} \leqslant w_{n+1}$

Ainsi on a : $u_{n+1} \leqslant u_n + \sqrt{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant w_n + \sqrt{n+1} \leqslant w_{n+1}$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$

- Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

$\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}$

2. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$, $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{4k+3}$ et $w_n = \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $u_n < v_n < w_n$ "

- $\underline{\mathscr{P}_1 \text{ est-elle vraie ?}}$ On a : $u_1 = \sqrt{\frac{3}{7}}$, $v_1 = \frac{5}{7}$ et $w_1 = \sqrt{\frac{5}{9}}$, donc on a bien $u_1 < v_1 < w_1$ i.e. $\boxed{\mathscr{P}_1 \textbf{ est vraie}}$
- <u>On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?</u>. On a : $u_n < v_n < w_n$ donc $\frac{4n+5}{4n+7}u_n < v_{n+1} < \frac{4n+5}{4n+7}w_n$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant \frac{4n+5}{4n+7}u_n$ et $\frac{4n+5}{4n+7}w_n \leqslant w_{n+1}$.

  ✓ $\frac{4n+5}{4n+7}u_n - u_{n+1}$ est du signe de $\Delta_n = \left(\frac{4n+5}{4n+7}u_n\right)^2 - (u_{n+1})^2$

  Or : $\Delta_n = \frac{3(4n+5)^2}{(4n+7)^2(4n+3)} - \frac{3}{4n+7} = 3\frac{(4n+5)^2 - (4n+3)(4n+7)}{(4n+7)^2(4n+3)} > 0$

  Donc $u_{n+1} \leqslant \frac{4n+5}{4n+7}u_n$

  ✓ $w_{n+1} - \frac{4n+5}{4n+7}w_n$ est du signe de $\delta_n = (w_{n+1})^2 - \left(\frac{4n+5}{4n+7}w_n\right)^2$

  Or : $\delta_n = \frac{5}{4n+9} - \frac{5(4n+5)^2}{(4n+7)^2(4n+5)} = 5\frac{(4n+7)^2 - (4n+5)(4n+9)}{(4n+7)^2(4n+9)} > 0$ Donc $\frac{4n+5}{4n+7}w_n < w_{n+1}$

  Ainsi on a : $u_{n+1} \leqslant \frac{4n+5}{4n+7}u_n < v_{n+1} < \frac{4n+5}{4n+7}w_n < w_{n+1}$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$
- Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

$\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}}$

3. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=0}^{n} (2k+1)!$ et $v_n = ((n+1)!)^{(n+1)}$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $u_n \geqslant v_n$ "

- $\underline{\mathscr{P}_1 \text{ est-elle vraie ?}}$ On a : $u_1 = 6$ et $v_1 = 4$, donc on a bien $u_1 \geqslant v_1$ i.e. $\boxed{\mathscr{P}_1 \textbf{ est vraie}}$
- <u>On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?</u>.On a : $u_n \geqslant v_n$ donc $u_{n+1} \geqslant v_n \times (2n+3)!$. Or $(2n+3)! = (n+1)! \times \prod_{k=n+2}^{2n+3} k \geqslant (n+1)! \times \prod_{k=n+2}^{2n+3} (n+2) = (n+1)! \times (n+2)^{n+2}$

  Ainsi $u_{n+1} \geqslant ((n+1)!)^{(n+1)} \times (2n+3)! \geqslant ((n+1)!)^{(n+1)} \times (n+1)! \times (n+2)^{n+2} = ((n+2)!)^{(n+2)} = v_{n+1}$
  donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$
- Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que

$\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{(n+1)}}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $U = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(px)$ et $V = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px)$.

   (a) $U + iV = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{ipx} = \left(1 + e^{ix}\right)^n$ Donc $\boxed{U + iV = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{inx}}$

(b) U et V étant les parties réelle et imaginaire du complexe préc{edent, on a :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\cos(px)=\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\cos(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sin(px)=\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\sin(nx)}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geqslant 2$

(a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|i-j|=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)=\sum_{j=2}^{n}\left(j(j-1)-\frac{j(j-1)}{2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2}$ car le terme en $j=1$ est nul.

Donc $\displaystyle\boxed{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|i-j|=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}}$

(b) Par changement de variable, on montre que $\displaystyle\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}|i-j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|i-j|$.

Donc, comme pour $i=j$ le terme à ajouter est nul, on a :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|i-j|=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}$$

Exercice 4 : Systèmes linéaires

1. $\begin{cases} mx+y & =2\\ \left(m^2+1\right)x+2my & =1\end{cases} \iff \begin{cases} y+mx & =2\\ \left(1-m^2\right)x & =1-4m^2\end{cases}$

Si $m^2=1$: il n'y a pas de solution. Sinon il y a une seule solution $\begin{pmatrix}\frac{4m-1}{m^2-1}\\ \frac{-2m^2+m-2}{m^2-1}\end{pmatrix}$

2.
$$\begin{cases} x+2y-\ \ 3z=a\\ 2x+6y-11z=b\\ x-2y+\ \ 7z=c\end{cases} \iff \begin{cases} x+\ \ 2y-\ \ 3z=a\\ \quad\ \ 2y-\ \ 5z=b-2a\\ \ -4y+10z=c-a\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z=a\\ \quad 2y-5z=b-2a\\ \qquad\quad 0=c+2b-5a\end{cases}$$

Le système n'a de solution que si $c=5a-2b$

Le cas échéant, **l'ensemble des solutions du système est la droite** $\begin{pmatrix}3a-b\\ \frac{b-2a}{2}\\ 0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+7z & =-1\\ x+y+4z & =1\\ 3x-5y+2z & =9\\ 2x+y-5z & =-8\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+4z & =1\\ y-z & =-3\\ -8y-10z & =6\\ -y-13z= & -10\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+4z & =1\\ y-z & =-3\\ -18z & =-18\\ -14z & =-13\end{cases}$

il n'y a pas de solution

Probleme : Simplification de radicaux carrés

1. **Sommes d'irrationnels**

(a) Soit α un nombre irrationnel positif

i. Si $r=s=0$. Alors on a bien $r\alpha=s$

Si $(r,s)\in\mathbb{Q}^2$ avec $r\alpha=s$. Supposons par l'absurde que $r\neq 0$. Alors on aurait $\alpha=\dfrac{s}{r}\in\mathbb{Q}$ ce qui est faux. Aussi $r=0$ et donc $s=0$.

Ainsi $\boxed{\forall(r,s)\in\mathbb{Q}^2,\ r\alpha=s\iff r=s=0}$

ii. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$ avec c et d non nuls. On a $c\alpha+d\neq 0$. On pose $r=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$

Si $r\in\mathbb{Q}$. Alors on a : $rd-b=(a-rc)\alpha$ donc d'après la question précédente on en déduit : $rd-b=0=a-rc$ et donc $rd=b$ et $rc=a$ et donc $ad-bc=0$

Si $ad-bc=0$ Si $ad=bc=0$ alors, comme c et d sont non nuls, on a $a=b=0$ et donc $r=0$ qui est bien rationnel.

Si $ad=bc\neq 0$. Alors $r=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\dfrac{b}{d}\times\dfrac{da\alpha+db}{bc\alpha+bd}=\dfrac{b}{d}\in\mathbb{Q}$

Donc $\boxed{\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\in\mathbb{Q}\iff ad-bc=0}$

(b) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{Q}^+\right)^2$ avec $x \neq y$, tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

i. On considère les deux nombres réels $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $B = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

On a $\boxed{A \times B = x - y \in \mathbb{Q} \textbf{ et } A + B = 2\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Comme $A+B$ est irrationnel, l'un des deux au moins est irrationnel. Si l'un des deux était rationnel, le produit $A \times B$ serait le produit rationnel d'un rationnel par un irrationnel ce qui, d'après la question 1(a)i, entrainerait que ce produit est nul. Or $A > 0$ et $B \neq 0$ car $x \neq y$. Ainsi : $\boxed{A \textbf{ et } B \textbf{ sont irrationnels}}$

.

ii. Soit $(r,s) \in \left(\mathbb{Q}_+^*\right)^2$ et $p = r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$.

Supposons par l'absurde $p \in \mathbb{Q}$. On aurait alors $2pr\sqrt{x} = p^2 + xr^2 - ys^2 \in \mathbb{Q}$ avec $2pr \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Aussi $pr = 0$ ie $p = 0$ ce qui n'est pas possible car $p > 0$.

Ainsi $\boxed{r\sqrt{x} + s\sqrt{y} \textbf{ est irrationnel}}$

(c) i. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est un produit rationnel d'irrationnels

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ est un produit irrationnel d'irrationnels

ii. $\sqrt{2} + \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2$ est une somme rationnelle d'irrationnels

$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ est une somme irrationnelle d'irrationnels

iii. $\boxed{1 + \sqrt{2} \textbf{ est un irrationnel}}$ comme somme d'un rationnel et d'un irrationnel.

D'après la question 1(b)i, $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{5} \textbf{ est irrationnel}}$.

Enfin, supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} = r \in \mathbb{Q}$. On aurait $2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2 + 2r\sqrt{6} + 6$ ie $2(1-r)\sqrt{6} = r^2 + 1$ donc, comme $\sqrt{6}$ irrationnel $1 - r = 0 = r^2 + 1$ ce qui est impossible. Donc $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} \textbf{ est irrationnel}}$

2. **Simplification de radicaux carrés**

Soient a et b deux rationnels positifs. On suppose que $\sqrt{b}$ est irrationnel. Nous voulons montrer que : $\exists (x,y) \in \left(\mathbb{Q}^+\right)^2 | \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \iff a^2 - b$ est le carré d'un élément de $\mathbb{Q}$.

Pour cela, nous allons procéder par analyse-synthèse.

(a) Analyse

Supposons l'existence de deux rationnels positifs (x,y) tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$

i. On a alors en élevant au carré : $2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} - x - y$ donc en élevant une nouvelle fois au carré : $4xy = (a - x - y)^2 + 2(a - x - y)\sqrt{b} + b$ ie $2(a - x - y)\sqrt{b} = 4xy - b - (a - x - y)^2$. Donc comme $\sqrt{b}$ est irrationnel et que tous les autres termes de cette relation sont rationnels, on a alors $a - x - y = 0$ et $4xy - b - (a - x - y)^2 = 0$ donc $\boxed{x + y = a \textbf{ et } xy = \frac{b}{4}}$

ii. On en déduit alors que $\boxed{x \textbf{ et } y \textbf{ sont les solutions de l'équation } 4z^2 - 4az + b = 0}$.

iii. $a^2 - b = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$ donc $\boxed{a^2 - b \textbf{ est le carré d'un rationnel}}$.

(b) Synthèse

Supposons $a^2 - b$ soit le carré d'un rationnel

i. On appelle x et y les solutions de l'équation $4z^2 - 4az + b = 0$. Ces solutions sont $\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$ et sont donc rationnelles du fait que $a^2 - b$ est le carré d'un rationnel. Aussi $\boxed{x \textbf{ et } y \textbf{ sont rationnels}}$. De plus, d'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, on a $\boxed{x + y = a \textbf{ et } xy = \frac{b}{4}}$

ii. On a $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = a + \sqrt{b}$ Donc, comme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est positif, on a $\boxed{\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}}$

(c) On suppose ici de plus que $a^2 - b > 0$. On a $a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$. Donc $\boxed{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \sqrt{a - \sqrt{b}}}$

(d) On a $\boxed{\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} = 3 + 2\sqrt{3} \quad \textbf{et} \quad \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1}$