MPSI 15-16 Feuille n° 10 : Ensembles

Du 19/11/15 au 25/11/15

Exercice 1. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Ecrire symboliquement les assertions suivantes :

1. f est bornée
2. f est constante
3. f est croissante
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante

Exercice 2. Soit E un ensemble. Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A. Montrer :

1. $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$
4. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
5. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$
6. $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$ avec $A\Delta B = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$

Exercice 3. Sur $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a la relation d'ordre : "inclusion". Est-ce une relation d'ordre totale ? Déterminer des parties de E dont $\{1\}$ soit un minorant, $\{1\}$ soit le plus petit élément, $\{1, 2, e\}$ soit une borne supérieure sans être le plus grand élément.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit sur E la relation $\mathscr{R}$ par : $\forall (x, y) \in E^2, x\,\mathscr{R}\,y \iff f(x) = f(y)$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E
2. Déterminer les classes d'équivalence lorsque $f = \sin$, $f = \exp$ et $f : x \mapsto x^2$
3. Montrer que : f est injective $\iff$ les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont des singletons.

Exercice 5. Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des parties de E telles que :
$\varnothing = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$. Pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.
Montrer que $(B_1, \ldots, B_n)$ est une partition de E

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

1. Montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(F))^2, f^{-1}(A\Delta B) = f^{-1}(A)\,\Delta f^{-1}(B)$
2. Montrer que : f injective $\iff \forall (C, D) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(C\Delta D) = f(C)\,\Delta f(D)$

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Montrer que :
$\forall B \in \mathcal{P}(F), f\left(f^{-1}(B)\right) = B\bigcap f(E)$

Exercice 8. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$. Pour $x \in E$, on pose :
$\phi(x) = \{t \in E | t \preccurlyeq x\}$

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, x \preccurlyeq y \iff \phi(x) \subset \phi(y)$
2. Montrer que ϕ est une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$. Est-ce une surjection ?
3. On considère Φ une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$. On définit alors sur E la relation $\mathscr{R}$ par : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathscr{R}y \iff \Phi(x) \subset \Phi(y)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 9. Soient A, B et C trois parties d'une même ensemble E. Démontrer que :
$$(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A) = (A\setminus C)\bigcup(B\setminus A)\bigcup(C\setminus B) = \left(A\bigcup B\bigcup C\right)\setminus\left(A\bigcap B\bigcap C\right)$$

Exercice 10. Déterminer $f\left(\mathbb{R}_+^*\right), f\left(\mathbb{R}^-\right), f\left(\{-1\}\right), f^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right), f^{-1}\left(\mathbb{R}^-\right), f^{-1}\left(\{-1\}\right)$ pour les fonctions définies par :$f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$ et $f(x) = \cos(x)$

Exercice 11. Comparer les deux ensembles : $f\left(A \bigcap f^{-1}(B)\right)$ et $f(A) \bigcap B$

Exercice 12. Ecrire la table de vérité donnant $D1$, $D2$, $D3$ en fonction de A, B et C dans le circuit logique suivant :