ENSEMBLES

Les ensembles sont des objets fondamentaux en Mathématiques même si l'on a du mal à les définir: seules les relations entre deux ensembles sont parfaitement établies. La notion intuitive de groupement ou collection d'objets à amener des paradoxes (ex: Paradoxe de Russell (1872-1970): si K est le catalogue des catalogues qui ne sont pas catalogués, K est-il catalogué?)
La théorie des ensembles est issue des travaux de BOLZANO Bernhard (Prague 1781-1848), Richard DEDEKIND (Brunswick 1831-1910) et Georg CANTOR (St Petersbourg 1845 – Halle 1918). L'axiomatique principalement utilisée est due à ZERMELO-FRAENKEL

I) Eléments de logique

Une propriété P peut-être vraie ou fausse (mais pas les deux en même temps): par exemple : "$x > 1$", "$\pi \in \mathbb{N}$"...

La négation de P, notée $\rceil$P (ou non P), est définie par la table de vérité suivante :

P	$\rceil$P
V	F
F	V

Exemple: La négation de "$x>1$" est "$x\leq 1$". La négation de "$\pi \in \mathbb{N}$" est "$\pi \notin \mathbb{N}$"

Les connecteurs logiques

La conjonction de P et Q, notée "P$\wedge$Q" et lu "P et Q": est définie par : "P$\wedge$Q" est vraie si et seulement si les deux propriétés sont vraies en même temps.

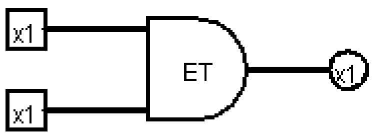
La disjonction de P et Q, notée "P$\vee$Q" et lu "P ou Q": est définie par : "P$\vee$Q" est vraie si et seulement si au moins une des deux propriétés est vraie.

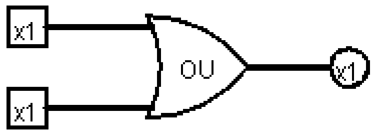
L'implication "P $\Rightarrow$ Q" : est définie par : "P $\Rightarrow$ Q" est vraie si et seulement si dès que P est vraie Q doit être vraie : il ne peut pas se faire que Q soit fausse et P soit vraie.

L'équivalence "P $\Leftrightarrow$ Q" : est définie par : "P $\Leftrightarrow$ Q" est vraie si et seulement si P et Q ont la même valeur.

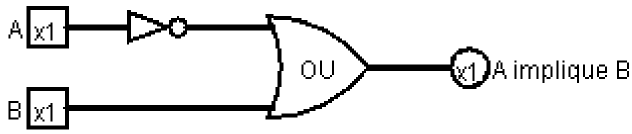
P	Q	P$\wedge$Q	P$\vee$Q	P $\Rightarrow$Q	$\rceil$Q $\Rightarrow$ $\rceil$P	P $\Leftrightarrow$ Q	$\rceil$P $\vee$ Q
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V

On voit une propriété : **la contraposition : "P $\Rightarrow$ Q" équivaut à " $\rceil$Q $\Rightarrow$ $\rceil$P "**
On retrouve les mêmes connecteurs logiques que sur les booléens vus en informatique.
On peut représenter les différentes compositions de connecteurs logiques sont forme de circuit





L'implication s'obtient alors avec le circuit :



Les quantificateurs $\forall$(pour tout) et $\exists$ (il existe) sont échangés dans une négation:

$\rceil(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E \mid \rceil P(x)$ et $\rceil(\exists x \in E \mid P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \rceil P(x)$

Exemple: La négation de: "Tous les hommes sont libres et égaux en droit" est "Au moins un homme n'est pas libre ou possède des droits différents de ceux d'un autre"

Exercice: Montrer le théorème logique suivant: $\rceil(P\wedge Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$

On rappelle les modes de raisonnements classiques déjà rencontrés : par l'absurde, pa contraposition, par analyse-synthèse, par récurrence.

II) Ensembles

1) Définition

Définition: On appellera **ensemble** une "collection" d'éléments qui vérifient tous une certaine propriété.

Appartenance: Si x est un élément de l'ensemble A, on note $x \in A$.

Définition: Un ensemble constitué d'un seul élément s'appelle **un singleton** .

Un ensemble constitué de deux éléments distincts s'appelle **une paire** . Il existe un ensemble qui n'est constitué d'aucun élément appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$ ou { }

Définition: On dit que **deux ensembles A et B sont égaux** si et seulement si les éléments de A sont identiques aux éléments de B

Définition: Soit A et B deux ensembles. On dit que **A est inclus dans B** si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de B. **On note : $A \subset B$**

Ecriture mathématique de l'inclusion et de l'égalité

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B \mid x = y) \wedge (\forall z \in B, \exists t \in A \mid t = z) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

2) Parties d'un ensemble

Définition: Soit E un ensemble. On dit que **A est une partie de E (ou sous-ensemble de E)** si et seulement si A est un ensemble inclus dans E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble constitué des parties de E.

Remarque: Les parties de E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Exemple: Si $E = \{0,1,2\}$, $\mathcal{P}(E) = \{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, E\}$

Pour tout ensemble E non vide, $\mathcal{P}(E)$ contient au moins deux éléments : E et $\varnothing$

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Attention : $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide...

3) Opérations sur les parties d'un ensemble

On se place dans un ensemble E.

Intersection

Soient A et B deux parties de E. On appelle **intersection de A et B**, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note $\mathbf{A \cap B}$

Réunion

Soient A et B deux parties de E. On appelle **réunion de A et B**, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). On le note $\mathbf{A \cup B}$

Complémentaire

Soit A une partie de E. On appelle **complémentaire de A dans E**, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\complement_E A$ **ou** A^c **ou** $E \backslash A$ **ou** $\bar{A}$

Différence

Soient A et B deux parties de E. On appelle **différence de A et B**, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. On le note $\mathbf{A \backslash B}$. Il s'agit de l'intersection de A et du complémentaire de B.

Application à la logique

L'implication: "$P \Rightarrow Q$" $\Leftrightarrow \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\} \subset \{x \in E \mid Q(x) \text{ vraie}\}$.

La conjonction: "$R = P \wedge Q$" $\Leftrightarrow \{x \in E \mid R(x) \text{ vraie}\} = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\} \cap \{x \in E \mid Q(x) \text{ vraie}\}$

La disjonction: "$R = P \vee Q$" $\Leftrightarrow \{x \in E \mid R(x) \text{ vraie}\} = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\} \cup \{x \in E \mid Q(x) \text{ vraie}\}$

La négation: "$R = \rceil P$" $\Leftrightarrow \{x \in E \mid R(x) \text{ vraie}\} = E \backslash \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\}$

4) Produit cartésien d'ensembles

Soient E et F deux ensembles . Soit $a \in E$ et $b \in F$. On appelle **couple (a,b)** la paire ordonnée (a,b) .

Remarque: On a la propriété : $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

Définition: Dans le couple (a,b), a est appelé **première composante du couple (a,b)** et b la seconde.

Définition: On appelle **produit cartésien des ensembles E et F**, l'ensemble $E \times F$ des couples (a,b) où $a \in E$ et $b \in F$. $\mathbf{E \times F = \{(a,b) \mid a \in E, b \in F\}}$

Soient $E_1, E_2, \ldots$ et E_n n ensembles . Soit $a \in E$ et $b \in F$. On appelle **couple (a,b)** la paire ordonnée (a,b) .

Remarque: On a la propriété : $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

Définition: Dans le couple (a,b), a est appelé **première composante du couple (a,b)** et b la seconde.

Définition: Soient $E_1, E_2, \ldots$ et E_n n ensembles. On appelle **produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ et E_n**, l'ensemble $\mathbf{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}$ des n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où pour tout k, $a_k \in E_k$

III) Applications

1) Définition

Soient E et F deux ensembles. Soit G une partie de $E\times F$

Définition: Une **application** f de E vers F est un triplet (E,F,G) où G partie de $E\times F$ et $\forall x\in E, \exists! y\in F \mid (x,y)\in G$.

E est **l'ensemble de départ** de f, F **l'ensemble d'arrivée** de f, G le **graphe** de f.
Si $x\in E$, l'unique $y\in F$ associée à x s'appelle **image de x par f** et est notée $y = f(x)$. x est alors un antécédent de y

Notation: L'application est notée : $E \xrightarrow{f} F$ ou : $f : E \longrightarrow F,\ x \longrightarrow f(x)$

2) Ensemble des applications de E vers F

Définition: On note **$\mathfrak{F}(E,F)$ ou F^E** l'ensemble des applications de E dans F.

Définition: Soit I un ensemble. On note **E^I l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$** d'éléments d'un ensemble E indexées par I.

Fonction indicatrice

Définition: Soit E un ensemble. Soit A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** (ou application caractéristique) de A, **la fonction $\mathbb{1}_A$** de E vers {0,1} et qui à x associe 1 si x est dans A et 0 sinon.

Propriété: Si A et B sont des parties de E, on a: $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = 1 - (1 - \mathbb{1}_A) \times (1 - \mathbb{1}_B)$

Composition

Définition: Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Soit $x\in E$, on peut déterminer son image y par f. On peut ensuite déterminer l'image z de y par g.
On peut alors définir l'application $h : E \to G,\ x \to z = g(f(x))$. On dit alors que **h est la composée de f par g**. On note **h = gof**

Application identique (ou identité)

Définition: **L'identité** de E est l'application : $Id_E : E \to E,\ x \to x$.

Remarque: $\forall f \in \mathfrak{F}(E,F),\ f = f \circ Id_E$ et $\forall f \in F(E,F),\ f = Id_F \circ f$.

Restriction

Définition: Soit $f\in \mathfrak{F}(E,F)$. Soit G une partie de E. On appelle **restriction de f à G** l'application $f_1 : G \to F,\ x \to f(x) = f_1(x)$. On note $f_1 = f_{|G}$.

Prolongement

Définition: Soit $f\in \mathfrak{F}(E,F)$. Soit G un ensemble dont E est une partie. On appelle **prolongement de f à G** une application $g : G \to F$ dont f est la restriction à E.

3) Equations, injectivité, surjectivité

Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et $y_0\in F$.
Une équation est la recherche des $x \in E$ tels que $f(x) = y_0$.

Définition: f est **injective** $\Leftrightarrow (\ \forall (x,x')\in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\ )$
$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, l'équation "$f(x) = y$" a au plus une solution)

Définition: f est **surjective** $\Leftrightarrow (\ \forall y \in F, \exists\, x \in E \mid y = f(x)\ )$
$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, l'équation "$f(x) = y$" a au moins une solution)

Définition: f est **bijective** $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective
$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, l'équation "$f(x) = y$" a exactement une solution)

Définition: Une **permutation de E** est une bijection de E dans E

Propriété: Soient $f \in \mathfrak{F}(E,F)$, $g \in \mathfrak{F}(F,G)$

- **Si f et g sont injectives alors gof est aussi injective**
- **Si f et g sont surjectives alors gof est aussi surjective**
- **Si f et g sont bijectives alors gof est aussi bijective**

Dem: A faire en exercice.

Exercice: a) Montrer que si gof est injective, alors f est injective.
b) Montrer que si gof est surjective, alors g est surjective

Bijection réciproque

Définition: Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On suppose que f est une bijection. On sait alors que $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid y = f(x)$.
On peut alors considérer l'application $g : F \to E, y \to x \mid y = f(x)$.
Cette application g s'appelle **l'application réciproque de f** et est notée $g = f^{-1}$.

Propriété: * f^{-1} est une bijection ** $f \circ f^{-1} = Id_F$ * $f^{-1} \circ f = Id_E$**

Dem: On commence par montrer que $f \circ f^{-1} = Id_F$. En effet si $y \in F$, on considère $x \in E$ tel que $y=f(x)$. On a alors $f^{-1}(y) = x$ et donc $f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$. Donc $f \circ f^{-1} = Id_F$.
De même $f^{-1} \circ f = Id_E$. Mais alors f^{-1} est injective car $f \circ f^{-1}$ l'est. De même f^{-1} est surjective car $f^{-1} \circ f$ l'est. Aussi f^{-1} est effectivement bijective.

Remarque: Ce résultat justifie la dénomination de **bijection réciproque** pour f^{-1}

Exercice: Si f et g sont bijectives, que dire de la bijection réciproque de $g \circ f$

4) Image directe, image réciproque

Définition: Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $A \subset E$. On appelle **image directe (ou simplement image) de A par f**, l'ensemble $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$. Si $A = E$, $f(E) = \mathrm{Im}(f)$

Définition: Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $B \subset F$. On appelle **image réciproque de B par f** , l'ensemble
$f^{-1}(B) = \overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

Remarque: La notation $f^{-1}(B)$ n'est qu'une notation: en aucun cas, le fait d'écrire $f^{-1}(B)$ n'autorise l'affirmation que f est bijective de bijection réciproque f^{-1}.

Exercice: Montrer que si f est une bijection de E vers F et que B est une partie de F alors l'image réciproque $\overset{-1}{f}(B)$ de B par f est l'image directe $f^{-1}(B)$ de B par f^{-1}

Exemple: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \sin(x) + 2x$. Déterminer: $f(\mathbb{R})$, $f([-\pi,3\pi[)$, $f(\mathbb{Z})$, $\overset{-1}{f}(\mathbb{R})$, $\overset{-1}{f}([-4\pi,8\pi[)$, $\overset{-1}{f}(4\pi\mathbb{Z})$

Exercice: Montrer que si f est une application de E vers F et que si A et B sont deux parties de F, on a
$\overset{-1}{f}(A \bigcup B) = \overset{-1}{f}(A) \bigcup \overset{-1}{f}(B)$ et $\overset{-1}{f}(A \bigcap B) = \overset{-1}{f}(A) \bigcap \overset{-1}{f}(B)$

Exercice: Montrer que si f est une application de E vers F et que si A et B sont deux parties de E, on a: $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$ et $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$. Peut-il ne pas y avoir égalité ?

Exercice: Montrer que si f est une application de E vers F et que si A est une partie de E et B une partie de F, on a $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ et $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$. Peut-il ne pas y avoir égalité ?

IV) Relation binaire

1) Relation binaire

Définition: Une **relation binaire (ou correspondance)** $\mathcal{R}$ de E vers F est un triplet (E,F,G) où G partie de $E \times F$. E est **l'ensemble de départ** de $\mathcal{R}$, F **l'ensemble d'arrivée** de $\mathcal{R}$, G le **graphe** de $\mathcal{R}$.
On dit que $a \in E$ est en relation avec $b \in F$ si et seulement si $(a,b) \in G$. On notera $a \,\mathcal{R}\, b$.

Exemple: Si $E = F = \mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R} : x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow$ x et y ont la même parité.

Propriétés liées aux relations

On considère une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E (i.e. de E vers E)

Définition: $\mathcal{R}$ est **réflexive** ssi $\forall a \in E,\ a \,\mathcal{R}\, a$

Définition: $\mathcal{R}$ est **symétrique** ssi $\forall (a,b) \in E^2,\ a \,\mathcal{R}\, b \Rightarrow b \,\mathcal{R}\, a$

Définition: $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** ssi $\forall (a,b) \in E^2,\ a \,\mathcal{R}\, b$ et $b \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow a = b$

Définition: $\mathcal{R}$ est **transitive** ssi $\forall (a,b,c) \in E^3,\ a \,\mathcal{R}\, b$ et $b \,\mathcal{R}\, c \Rightarrow a \,\mathcal{R}\, c$

2) Relation d'équivalence

Partition

Définition: Soit E un ensemble. Une partition de E est une partie P de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant : (i) $\forall A\in P,\ A \neq \varnothing$ (ii) $\forall (A,B)\in P^2$, $A \cap B = \varnothing$ (iii) $\forall x\in E, \exists A\in P \mid x\in A$

Exemple: $\{ \{x\};\ x \in E \}$ est une partition de E.

$\{ \{\text{entiers pairs}\}, \{\text{entiers impairs}\} \}$ est une partition de $\mathbb{Z}$

$\{ \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^- \}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

Si f est une application de E vers F, $\{ \overset{-1}{f}\{y\};\ y\in F \}$ est une partition de E.

Relation d'équivalence

Définition: Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que R est **une relation d'équivalence** si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple: Dans le plan, la relation : " $M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow$ M et M' ont la même abscisse " est une relation d'équivalence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation dans $\mathbb{Z}$, " $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow n$ divise $y - x$ " est une relation d'équivalence.

Définition: La relation d'équivalence précédente s'appelle **congruence modulo n** et on note $x \equiv y\ [n]$ ou $x \equiv y \mod n$ ou $x = y \mod n$.

Définition: Soit a un réel non nul. La relation sur $\mathbb{R}$ définie par " $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow a$ divise $y - x$ " est une relation d'équivalence appelée **congruence modulo a** et on note $x \equiv y\ [a]$ ou $x \equiv y \mod a$

Définition: Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E et $x\in E$. On appelle **classe d'équivalence de x** l'ensemble : $cl(x) = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y \}$. Une partie de E est une classe d'équivalence de E si c'est la classe d'équivalence d'un certain élément de E.

Proposition: Soit R est une relation d'équivalence sur E. Alors l'ensemble des classes d'équivalence deux à deux distinctes de E est une partition de E.

Dem: (i) $\forall x \in E,\ cl(x) \neq \varnothing$ car $x \in cl(x)$

(ii) Soit $(x,y) \in E^2 \mid cl(x) \cap cl(y) \neq \varnothing$. Soit $z \in cl(x) \cap cl(y)$. On a $x \mathcal{R} z$ et $y \mathcal{R} z$. D'où par symétrie de la relation d'équivalence, on a $x \mathcal{R} z$ et $z \mathcal{R} y$. D'où par transitivité, $x \mathcal{R} y$

Aussi, $\forall t \in cl(y)$, $y \mathcal{R} t$ et donc $x \mathcal{R} t$, d'où $t \in cl(x)$. Ainsi $cl(y) \subset cl(x)$.

De même $cl(x) \subset cl(y)$ et ainsi $cl(x) = cl(y)$. Aussi cl(x) et cl(y) sont la même classe et n'est donc pris qu'une seule fois. Ainsi, si on a deux classes distinctes, elles sont nécessairement disjointes.

(iii) Soit $x \in E$, on a $x \in cl(x)$: il existe au moins une classe contenant x.

Ainsi l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ forme une partition de E.

3) Relation d'ordre

Relation d'ordre

Définition: Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est **une relation d'ordre (ou un ordre)** si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Notation: On notera généralement une relation d'ordre sous la forme $\leq$ ou $\prec$.

Exemple: L'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}(E)$.

L'inégalité large $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

Définition: On appelle **ordre total sur E** , une relation d'ordre R telle que : $\forall (x,y)\in E^2$, au moins une des deux propositions suivantes est vraie : $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

Définition: **Un ordre partiel sur E** est une relation d'ordre non totale.

Exemple: $\leq$ est total sur $\mathbb{N}$. $<$ n'est pas un ordre sur $\mathbb{R}$. La divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel

L'inclusion est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$.