Devoir en temps libre n° 6

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Formule d'inversion de Pascal

On considère deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$ où les $\binom{n}{k}$ désignent les coefficients binomiaux.

Le but du problème est d'exprimer, pour tout n, b_n en fonction des a_k

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow$
$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leqslant n \Longrightarrow$
$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}$$

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$

4. On suppose que, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant m \Longrightarrow$
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$
Calculer alors b_{m+1} en fonction des $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant m+1}$

5. Montrer alors la formule d'inversion de Pascal :
$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

6. En déduire une expression de X^n en fonction des $\left((1+X)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$

CORRECTION

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$.

Le but du problème est d'exprimer, pour tout n, b_n en fonction des a_k

1. Soit $(n,p,k)\in\mathbb{N}^3$ avec $0\leqslant k\leqslant p\leqslant n$. On a :
$\displaystyle\binom{n+1}{p}\binom{p}{k}=\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\times\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!k!(p-k)!}$. De même :
$\displaystyle\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\times\frac{(n+1-k)!}{(p-k)!(n+1-p)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!k!(p-k)!}$.
Ainsi : $\boxed{\forall(n,p,k)\in\mathbb{N}^3|0\leqslant k\leqslant p\leqslant n\ ,\ \binom{n+1}{p}\binom{p}{k}=\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}}$

2. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ avec $0\leqslant k\leqslant n$. On a $0=(1+(-1))^{n+1-k}=\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1-k}(-1)^j\binom{n+1-k}{j}$.
Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n+1-k}{j}=(-1)^{n-k}}$

3. On a : $a_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_k=b_{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k$. Donc
$\boxed{\displaystyle b_{n+1}=a_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k}$.

4. $b_{m+1}=a_{m+1}-\displaystyle\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}b_p=a_{m+1}-\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k\right)$
$=a_{m+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{p=k}^{m}(-1)^{p-k}\binom{m+1}{p}\binom{p}{k}\right)a_k=a_{m+1}-\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{p=k}^{m}(-1)^{p-k}\binom{m+1}{k}\binom{m+1-k}{p-k}\right)a_k$
d'après la question 1. Ainsi :
$b_{m+1}=a_{m+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\left(\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^j\binom{m+1-k}{j}\right)a_k=a_{m+1}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}(-1)^{m-k}a_k$ d'après la question 2.
Ainsi $\boxed{\displaystyle b_{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^{m+1-k}a_k}$

5. La relation demandée est vraie pour $n=0$ (car elle affirme $b_0=a_0$ ce qui est vrai).
De plus, d'après la question 4, la propriété est "fortement" héréditaire. Ainsi, par

théorème de récurrence forte, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k}$

6. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$. Ainsi, d'après la formule d'inversion de Pascal, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1+X)^k}$