Devoir en temps libre n° 6

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Formule d'inversion de Pascal

On considère deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$

où les $\displaystyle\binom{n}{k}$ désignent les coefficients binomiaux.

Le but du problème est d'exprimer, pour tout n, b_n en fonction des a_k

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow$
$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leqslant n \Longrightarrow$
$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}$$

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$

4. On suppose que, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant m \Longrightarrow$
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$
Calculer alors b_{m+1} en fonction des $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant m+1}$

5. Montrer alors la formule d'inversion de Pascal :
$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

6. En déduire une expression de X^n en fonction des $\left((1+X)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$