# Devoir en temps libre n° 7

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

## Problème : Etude des suites homographiques

### Partie I Etude d'une suite homographique

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c$ et $d$ réels tels que : $c\,(ad - bc) \neq 0$.

1. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet soit 1 ou 2 solutions dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ ( appelés points fixes de $f$ ) soit aucune solution réelle.

   On considère dorénavant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

   On suppose pour le moment que la suite existe effectivement : on étudiera plus tard les conditions d'existence de la suite en fonction de $u_0$.

2. Montrer que si $f$ n'a pas de points fixes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. On suppose que $f$ admet au moins un point fixe $\alpha$. Montrer que, s'il existe un entier $p$ tel que $u_p = \alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis que, si $p > 0$, on a également $u_{p-1} = \alpha$ et, enfin, qu'en fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

4. On suppose que $f$ admet deux points fixes distincts $\alpha$ et $\beta$, et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$

   (b) Exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$ et de $u_0$ puis $u_n$ en fonction de $n$ et $u_0$.

   (c) Cette dernière expression étant valable tant que $u_n$ est défini, trouver une condition sur $u_0$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où $E$ est l'ensemble des termes d'une certaine suite.

5. On suppose que $f$ admet un seul point fixe $\alpha$ et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

   (b) Exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$ et de $u_0$ puis $u_n$ en fonction de $n$ et $u_0$.

   (c) Cette dernière expression étant valable tant que $u_n$ est défini, trouver une condition sur $u_0$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où $E$ est l'ensemble des termes d'une certaine suite.

### Partie II Etude de deux exemples

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

   (b) Montrer que l'équation : $\dfrac{4x+2}{x+5} = x$ possède deux solutions $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

(d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 12}{3u_n - 5}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$
   (b) Montrer que l'équation : $\dfrac{7x-12}{3x-5} = x$ possède une et une seule solution réelle $\alpha$.
   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.