

FONCTIONS CONTINUES DE \mathbb{R} DANS \mathbb{R}

A ETUDE LOCALE D'UNE FONCTION

I) Limite d'une fonction en un point a

1) Limite

I est un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur I et $a \in \mathbb{R}$ est un élément de I ou (extrémité de I). Soit $b \in \mathbb{R}$.

Définition : On dit que **f admet b pour limite en a** ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon.$$

Théorème: Si f admet b pour limite en a alors le nombre b est unique.

Définition : Cet unique b est appelé **limite** de la fonction f en a et on note :

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f$$

Dem: Supposons par l'absurde qu'il existe deux éléments distincts b et b' tels que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta_1 \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon \quad (1) \text{ et}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta_2 \Rightarrow \mid f(x) - b' \mid \leq \varepsilon \quad (2)$$

Prenons $\varepsilon = \frac{\mid b - b' \mid}{4}$. On a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ car on suppose $b \neq b'$. Ainsi d'après (1) et (2)

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta_1 \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta_2 \Rightarrow \mid f(x) - b' \mid \leq \varepsilon$$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow (\mid f(x) - b' \mid \leq \varepsilon \text{ et } \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon)$

Or : $b - b' = b - f(x) + f(x) - b'$. D'où : $\mid b - b' \mid \leq \mid b - f(x) \mid + \mid f(x) - b' \mid$.

Ainsi : $\forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid b - b' \mid \leq \mid b - f(x) \mid + \mid f(x) - b' \mid \leq 2\varepsilon = \frac{\mid b - b' \mid}{2}$ ce qui est impossible si $\mid b - b' \mid > 0$. On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse de départ et donc le théorème est montré.

De même on pourrait définir la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ ou des limites infinies en a ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition : On dit que ssi

| | |
|---|---|
| f admet b pour limite en a | $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon$ |
| f admet b pour limite en $+\infty$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq K \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon$ |
| f admet b pour limite en $-\infty$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \leq K \Rightarrow \mid f(x) - b \mid \leq \varepsilon$ |
| f admet $+\infty$ pour limite en a | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$ |
| f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq K \Rightarrow f(x) \geq M$ |
| f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \leq K \Rightarrow f(x) \geq M$ |
| f admet $-\infty$ pour limite en a | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq M$ |
| f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq K \Rightarrow f(x) \leq M$ |
| f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ | $\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \leq K \Rightarrow f(x) \leq M$ |

Définition : Si $a \in I$. On dit que **f est continue en a** ssi f admet f(a) pour limite en a i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \varepsilon$$

Remarque : Si $a \in I$ et si f a une limite finie en a, cette limite est nécessairement f(a)

Définition : Si $a \in I$ avec $a \notin I$. On dit que **f est prolongeable par continuité en a** ssi f admet un prolongement sur $I \cup \{a\}$ continu en a.

Propriété: f prolongeable par continuité en a ssi f admet une limite finie en a.

Propriété: (i) Si $b \in \mathbb{R}$, dire que f admet b pour limite en a (éventuellement infinie) équivaut à dire que $f - b$ admet 0 pour limite en a

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, dire que f admet b (éventuellement infinie) pour limite en a équivaut à dire que l'application $t \rightarrow f(a+t)$ admet b pour limite en 0

Dem: Les propriétés précédentes découlent directement des définitions

2) Limite à gauche et à droite

Définition : On appelle **gauche de a** : $] -\infty; a[$ et **droite de a** $] a; +\infty[$

Définition : Soit $a \in I^*$. On dit que **f admet une limite à gauche en a** si la restriction de f à $I \cap] -\infty; a[$ admet une limite en a. On note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ cette limite à gauche

* On dit que **f admet une limite à droite en a** si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet une limite en a. On note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ cette limite à droite

Exemple: Si a est un point intérieur à I montrer que f admet une limite en a ssi f admet des limites à droite et à gauche en a et que ces limites sont égales

Définition : * On dit que **f est continue à gauche en a** ssi la restriction de f à $I \cap]-\infty; a]$ est continue en a.

* On dit que **f est continue à droite en a** ssi la restriction de f à $I \cap [a; +\infty[$ est continue en a.

Exemple: La fonction $x \rightarrow E(x)$ est continue à droite en tout point mais n'est continue à gauche que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3) Fonctions ayant une limite et fonctions bornées

Théorème: Soit f une fonction admettant une limite finie en a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors f est bornée au voisinage de ce point .

Remarque: "f bornée au voisinage de a" signifie qu'il existe un intervalle J_a tel que f est bornée sur $I \cap J_a$ avec J_a de la forme $[a-\delta; a+\delta]$ ($\delta > 0$) si a fini, J_a de la forme $[M; +\infty[$ si $a = +\infty$ et J_a de la forme $]-\infty; M]$ si $a = -\infty$.

Dem: * Si a fini. Soit $\varepsilon = 1$. $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x) - b| \leq \varepsilon = 1$. Soit $M = |b| + 1$

On a : $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x)| \leq |f(x) - b| + |b| \leq M$

* Si $a = +\infty$. Soit $\varepsilon = 1$. $\exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I \cap [K; +\infty[, |f(x) - b| \leq \varepsilon = 1$. Soit $M = |b| + 1$

On a : $\forall x \in I \cap [K; +\infty[, |f(x)| \leq |f(x) - b| + |b| \leq M$

Théorème: Soit f une fonction admettant une limite b strictement positive en a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors f est minorée, au voisinage de ce point, par un réel k strictement positif .

Dem: Soit $\varepsilon = \frac{b}{2}$ et $k = \frac{b}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $k > 0$

* Si a fini. $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x) - b| \leq \frac{b}{2}$. On a alors $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta],$

* Si $a = +\infty$. $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I \cap [M; +\infty[, |f(x) - b| \leq \frac{b}{2} = 1$. On a alors $\forall x \in I \cap [K; +\infty[, f(x) \geq b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} = k$

4) Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Théorème: Soient f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que : $\forall x \in I, |f(x)| \leq g(x)$ et on suppose que g admet 0 pour limite en a. Alors f admet 0 pour limite en a.

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |g(x)| \leq \varepsilon$. On a alors $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x)| \leq \varepsilon$

Théorème: Soient f, g et h trois fonctions définies sur I. On suppose que :

$\forall x \in I, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et on suppose que h et g admettent b pour limite commune en a. Alors f admet b pour limite en a.

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1], |h(x) - b| \leq \varepsilon$, $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_2; a+\delta_2], |g(x) - b| \leq \varepsilon$.

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta > 0$ et : $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], -\varepsilon \leq h(x) - b \leq f(x) - b \leq g(x) - b \leq \varepsilon$ i.e. $|f(x) - b| \leq \varepsilon$

Théorème: Soit f une fonction définie sur I admettant b pour limite en a.

Alors |f| admet |b| pour limite en a

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x) - b| \leq \varepsilon$. Or $\forall x \in I, ||f(x)| - |b|| \leq |f(x) - b|$

D'où $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], ||f(x)| - |b|| \leq \varepsilon$

II) Opérations sur les limites

Théorème: Soient f et g deux fonctions définies sur I admettant des limites finies en a: b et m.

Alors : 1) f + g admet b + m pour limite en a

2) f × g admet b × m pour limite en a 3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet λb pour limite en a.

Dem: 1) Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1], |f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_2; a+\delta_2], |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta > 0$ et : $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |(f(x) + g(x)) - (b + m)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2) On a $\forall x \in I, |f(x)g(x) - bm| = |(f(x) - b)g(x) + b(g(x) - m)| \leq |g(x)| |f(x) - b| + |b| |g(x) - m|$

Or g est bornée au voisinage de a : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta_3 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_3; a+\delta_3], |g(x)| \leq M$. On peut prendre $M \geq |b|$

D'autre part, $\exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1], |f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in I \cap [a-\delta_2; a+\delta_2], |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. On a $\delta > 0$ et : $\forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x)g(x) - b m| \leq |g(x)| |f(x) - b| + |b| |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

3) On applique le résultat du 2) avec la fonction g constante égale à λ

Exercice: Montrer que le produit d'une fonction tendant vers 0 en a et d'une fonction bornée au voisinage de a est une fonction tendant vers 0 en a .

Théorème: Soit f une fonction définie sur I admettant une limite non nulle b en a .

Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et admet $\frac{1}{b}$ pour limite en a

Dem: $|f|$ admet une limite strictement positive en a : $|b|$. Donc $\exists k > 0, \exists \delta_1 > 0; \forall x \in I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1], |f(x)| \geq k$

Ainsi $\frac{1}{f}$ est définie sur $I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1]$. D'autre part, on a : $\forall x \in I \cap [a-\delta_1; a+\delta_1], \left| \frac{1}{f}(x) - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - f(x)|}{|b f(x)|} \leq \frac{|b - f(x)|}{|b k|}$.

Par passage à la limite dans un encadrement, on a : $\frac{1}{f} - \frac{1}{b}$ admet 0 pour limite en a donc $\frac{1}{f}$ admet $\frac{1}{b}$ pour limite en a

Corollaire: Soient f et g deux fonctions définies sur I admettant deux limites finies b et m avec m non nulle. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et admet $\frac{b}{m}$ pour limite en a

Dem: On utilise les résultats sur l'inverse et sur le produit.

Limite d'une composée

Théorème: Soit f de I vers J . Soit g de J vers \mathbb{R} . Soit a et b deux points, a dans I (ou extrémité de I) et b dans J (ou extrémité de J). On suppose que f admet b pour limite en a et g admet m pour limite en b

Alors la fonction $g \circ f$ admet m pour limite en a

Dem: Soit $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in J \cap [b-\delta; b+\delta], |g(y) - m| \leq \varepsilon$

Or, puisque $\delta > 0, \exists \mu > 0 \forall x \in I \cap [a-\mu; a+\mu], |f(x) - b| \leq \delta$. Mais alors, $f(x) \in J \cap [b-\delta; b+\delta]$ donc $|g(f(x)) - m| \leq \varepsilon$

D'où on a bien construit $\mu > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap [a-\mu; a+\mu], |g(f(x)) - m| \leq \varepsilon$

Image d'une suite convergente : caractérisation séquentielle de la limite

Théorème: Soit f de I vers \mathbb{R} . Soit a dans I (ou extrémité de I). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers a . On suppose que f admet b pour limite en a

Alors la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b

Dem: Soit $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in I \cap [a-\delta; a+\delta], |f(x) - b| \leq \varepsilon$

Or, puisque $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \leq \delta$. Mais alors, $x_n \in I \cap [a-\delta; a+\delta]$ donc $|f(x_n) - b| \leq \varepsilon$

D'où on a bien construit entier N tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - b| \leq \varepsilon$

Théorème de la limite monotone

Théorème: Soit f monotone sur I . Soit a dans I (ou extrémité de I). Alors f possède des limites (finies ou non) à gauche (si a extrémité de $I \cap]-\infty, a[$) et à droite en a (si a extrémité de $I \cap]a, +\infty[$)

De plus, si f est croissante, alors : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup_{x < a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x > a} f(x)$

De plus, si f est décroissante, alors : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \inf_{x < a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{x > a} f(x)$

Dem: On travaille avec f croissante. Il faut étudier trois cas : 1) a dans I et n'est pas une extrémité de I

2) a est dans I et est une extrémité de I 3) a est une extrémité de I et n'est pas dans I

1) Soit $B = \{y \mid \exists x \in I \cap]-\infty, a[; y = f(x)\} = f(I \cap]-\infty, a[)$. On a $B \neq \emptyset$ et B majorée car : $\forall x \in I \cap]-\infty, a[, f(x) \leq f(a)$ car f est croissante. Donc B possède une borne supérieure M .

Soit alors $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de borne supérieure, $\exists x_1 \in I \cap]-\infty, a[; M - \varepsilon < f(x_1)$.

Mais alors, si on pose $\delta = |a - x_1| > 0$, on a : $\forall t \in I \cap]-\infty, a[, |t - a| \leq \delta \Rightarrow M - \varepsilon < f(x_1) \leq f(t) \leq M$ i.e. $|f(t) - M| \leq \varepsilon$

D'où f admet une limite à gauche en a et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup_{x < a} f(x)$

De même en travaillant avec $f(I \cap]a, +\infty[)$, on trouve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x > a} f(x)$

2) Si $a = \sup(I)$ alors $f(I \cap]-\infty, a[)$ est majorée par $f(a)$ et on se trouve dans le même cas que 1)

Si $a = \inf(I)$ alors $f(I \cap]a, +\infty[)$ est minorée par $f(a)$ et on se trouve dans le même cas que 1)

3) Si $a = \sup(I)$ alors * soit $f(I \cap]-\infty, a[)$ est majorée et on se trouve dans le même cas que 1)

* soit $f(I \cap]-\infty, a[)$ n'est pas majorée et on montre que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$: En effet :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in I \mid f(x_1) > M$. Or f croissante, donc $\forall x \in I, x \geq x_1 \Rightarrow f(x) \geq f(x_1) > M$

B FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

I) Espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle I

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . f une fonction de I vers \mathbb{R} .

Définition : On dit que **f est continue sur I** ssi f est continue en tout point de I

Définition équivalente : f continue sur $I \Leftrightarrow \forall a \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$

Notation : On note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R}

Théorème: 1) $\forall (f, g) \in C(I)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f+g, f \times g, \lambda f) \in C(I)^3$. De plus si g ne s'annule pas sur $I, \frac{f}{g} \in C(I)$

2) $\forall (f, g) \in C(I)^2, \sup(f, g) \in C(I), \inf(f, g) \in C(I)$ et $|f| \in C(I)$

Dem: 1) On utilise les résultats correspondants pour les limites.

2) Soit $a \in I$. * Si $f(a) > g(a)$. Comme $f - g$ admet une limite strictement positive en a , il existe un voisinage de a inclus dans I sur lequel $f - g$ est strictement positive. Sur ce voisinage, on a : $\sup(f, g) = f$ et $\inf(f, g) = g$. Comme f et g sont continues en a , $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont aussi continues en a

* Si $f(a) < g(a)$ on inverse les rôles de f et de g dans le point précédent.

* Si $f(a) = g(a) = b$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

et $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$. On pose $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta > 0$ et

$\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |\sup(f(x), g(x)) - b| < \varepsilon$ et $|\inf(f(x), g(x)) - b| < \varepsilon$: $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues en a .

Pour la continuité de $|f|$ on écrit que $|f| = \sup(f, -f)$ et on utilise ce que l'on vient juste d'établir.

Continuité d'une composée

Théorème: Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit f continue de I vers J . Soit g continue de J vers \mathbb{R} .

Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

Dem: On utilise le résultat obtenu pour la limite d'une composée.

II) Prolongement, restriction

Restriction

Définition : Soit f une fonction de I vers \mathbb{R} . Soit J un intervalle de \mathbb{R} avec $J \subset I$.

On appelle **restriction de f à J** la fonction $J \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$.

Notation : On note $f|_J$ la restriction de f à J

Théorème: Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} tels que $J \subset I$. Soit f une fonction continue de I vers \mathbb{R} . Alors la fonction $f|_J$ est continue sur J

Dem: Soit $a \in J$. Soit $g = f|_J$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur I donc en a , on a :

$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En particulier, $\forall x \in J, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ i.e. $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$

Ainsi g est continue en a . Ceci étant vrai pour tout a dans J , on a g continue sur J .

Prolongement

Définition : Soit f une fonction de I vers \mathbb{R} . Soit J un intervalle de \mathbb{R} avec $I \subset J$.

On appelle **prolongement de f à J** toute fonction g de J vers \mathbb{R} , vérifiant : $\forall x \in I, g(x) = f(x)$

Théorème: Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de I avec $a \notin I$. Soit $f \in C(I)$. On suppose de plus que f admet une limite finie b en a . Alors la fonction $g : I \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$ si $x \in I$ et $a \rightarrow b$ est une fonction continue sur $I \cup \{a\}$.

Dem: Provient directement de la définition de la continuité sur un intervalle.

Définition : La fonction précédente est appelée prolongement continu de f en a (ou on dit que l'on a prolonger f par continuité en a en posant $g(a) = b$)

III) Images d'intervalles par une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires: Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.

Dem: Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) \leq f(b)$. On considère d une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. On construit alors les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

* On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$: on a $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq d \leq f(b_0)$

* Supposons construits a_n et b_n tels que $a_n \leq b_n$ et $f(a_n) \leq d \leq f(b_n)$. On pose $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

- Si $f(c_n) \leq d$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(c_n) > d$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$

Dans les deux cas on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq d \leq f(b_{n+1})$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (car géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

Donc les suites sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $c \in [a, b]$.

De plus, puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c , que f est continue en c et que $\forall n \in \mathbb{N} f(a_n) \leq d$, on a en passant à la limite dans cette inégalité large, $f(c) \leq d$. De même on montre que $d \leq f(c)$. Ainsi $f(c) = d$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème : Image d'un intervalle par une fonction continue: Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors $f(I)$ est un intervalle

Dem: Il suffit de montrer que $f(I)$ est une partie convexe de \mathbb{R}

Soit $(x_1, x_2) \in f(I)^2$ avec $x_1 \leq x_2$. On doit montrer $[x_1, x_2] \subset f(I)$ c'est à dire : $\forall x \in [x_1, x_2], x \in f(I)$.

Soit alors $x \in [x_1, x_2]$. Puisque $x_1 \in f(I), \exists t_1 \in I \mid x_1 = f(t_1)$. De même $\exists t_2 \in I \mid x_2 = f(t_2)$.

Puisque x est une valeur comprise entre x_1 et x_2 , on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'une valeur t comprise entre t_1 et t_2 (donc dans I car I est convexe) telle que $x = f(t)$. Ainsi $x \in f(I)$

Donc $f(I)$ est bien une partie convexe de \mathbb{R} , c'est-à-dire que $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R}

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème : Soit f une fonction continue sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes

Dem: (non exigible) On va d'abord montrer que f est bornée puis quelle atteint ses bornes supérieure et inférieure.

1) Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] \mid f(x_n) > n$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, lui extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit c la limite de cette suite extraite. Puisque f est continue en c , on a $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers $f(c)$ donc $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Cela contredit la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$.

Ainsi f est majorée. De même on montre par l'absurde que f est minorée

2) Soit $M = \sup_{[a, b]}(f)$. Par caractérisation de la borne supérieure, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [a, b] \mid M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, lui extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit c la limite de cette suite extraite. Puisque f est continue en c , on a $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers $f(c)$. Or on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \frac{1}{n} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers M . Par unicité de la limite,

on a $M = f(c)$. Ainsi f atteint sa borne supérieure. De même on montre que f atteint sa borne inférieure.

Corollaire : Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ est un segment

Dem: L'image de $[a, b]$ est un intervalle car f continue, borné (d'après le résultat précédent). De plus f atteint ses bornes.

D'où $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{[a, b]}(f)$ et $M = \sup_{[a, b]}(f)$

IV) Bijections continues

Caractérisation de la continuité des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction monotone sur un intervalle I . Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I

Dem: (Non exigible) Supposons f croissante

- Soit a un point de I qui n'est pas sa borne supérieure. Comme f est croissante, f admet en a une limite à droite : λ

On a de plus : $f(a) \leq \lambda$ et $\lambda = \inf_{x > a} f(x)$. Puisque f est croissante : $\forall x \in I, x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ et $x > a \Rightarrow f(x) \geq \lambda$

Supposons par l'absurde que $f(a) < \lambda$. Les inégalités précédentes affirment alors que f n'atteint aucune des valeurs strictement comprises entre $f(a)$ et λ . Mais, puisque a n'est pas la borne supérieure de I , il existe b dans I tel que $a < b$.

Mais alors, puisque $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et λ sont entre $f(a)$ et $f(b)$. D'autre part toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f depuis I . On aboutit donc à une contradiction.

Ainsi, si a n'est pas la borne supérieure de I , f est continue à droite en a

- De même on montre que f est continue à gauche en tout point a de I qui n'est pas sa borne inférieure.
- Ainsi f est continue sur I

Caractérisation de la monotonie pour les fonctions continues injectives sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction continue injective sur un intervalle I . Alors f est strictement monotone sur I

Dem: (Non exigible) Supposons f continue injective.

Par l'absurde, supposons f non strictement monotone. Donc il existe (a,b,c) dans I tels que $a < b < c$ et $f(b)$ extremum de $\{f(a), f(b), f(c)\}$, et comme f injective, c'est un extremum strict. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il s'agit d'un minimum. On considère alors A le minimum entre $f(a)$ et $f(c)$.

Soit alors $\gamma \in]f(b), A[$. On a $\gamma \in]f(b), f(a)[$, donc d'après le th des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $\gamma = f(\alpha)$.

De même, il existe $\beta \in]b,c[$ tel que $\gamma = f(\beta)$. On trouve une contradiction avec l'injectivité de f .

Aussi f est strictement monotone sur I

Continuité de la bijection réciproque sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I . Alors :

1) $J = f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} et f est une bijection de I vers J

2) Sa bijection réciproque est strictement monotone, de même monotonie que f et continue de J vers I

Dem: 1) f est injective car elle est strictement monotone. De plus elle est surjective de I vers $f(I)$. Enfin puisque f est continue et I intervalle de \mathbb{R} , $f(I)$ est un intervalle : J .

2) Sa réciproque est strictement monotone de même monotonie. Par exemple si f est croissante, on a :

Soit $(t,u) \in J^2$ avec $t < u$, $\exists (x,y) \in I^2$ | $t = f(x)$ et $u = f(y)$. De plus, puisque f est strictement croissante, on a nécessairement $x < y$.

Or $x = f^{-1}(t)$ et $y = f^{-1}(u)$. D'où : $\forall (t,u) \in J^2, t < u \Rightarrow f^{-1}(t) < f^{-1}(u)$: f^{-1} strictement croissante.

De plus l'image de l'intervalle J par f^{-1} est un intervalle (puisque c'est I) : donc d'après le théorème précédent, f^{-1} est continue sur J .

C) CAS DES FONCTIONS A VARIABLES REELLES ET A VALEURS COMPLEXES

a) Limite

I est un intervalle de \mathbb{R} , $f \in F(I, \mathbb{C})$, $a \in \overline{I}$. Soit $b \in \mathbb{C}$.

Définition : On dit que f admet b pour limite en a ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

Théorème: Si f admet b pour limite en a alors le nombre b est unique.

Définition: b est appelé limite de la fonction f en a et on note : $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f$

Dem: Comme pour \mathbb{R}

Propriété: Soit $f \in F(I, \mathbb{C})$ et $a \in \overline{I}$.

1) f admet une limite en a ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent une limite en a .

2) Le cas échéant, $\lim_a f = \lim_a \operatorname{Re}(f) + i \lim_a \operatorname{Im}(f)$

Propriété: Soit $f \in F(I, \mathbb{C})$, $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a

Propriété: Soit $(f,g) \in (F(I, \mathbb{C}))^2$ et $a \in \overline{I}$. Si f (resp. g) admet l (resp. m) pour limite en a , alors

1) $f + g$ admet $l + m$ pour limite en a

2) fg admet lm pour limite en a

Dem: Comme pour \mathbb{R}

b) Continuité

Définition : Si $a \in I$. On dit que f est continue en a ssi f admet $f(a)$ pour limite en a i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Définition : On dit que f est continue sur I ssi f continue en tout point de I

Remarque: L'ensemble $C(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I est une sous-algèbre de $F(I, \mathbb{C})$

Remarque: Le théorème des valeurs intermédiaires ne se prolonge pas