Devoir en temps libre n° 7

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Etude des suites homographiques

Partie I Etude d'une suite homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d réels tels que : $c(ad - bc) \neq 0$.

1. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet soit 1 ou 2 solutions dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ (appelés points fixes de f) soit aucune solution réelle.
   On considère dorénavant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   On suppose pour le moment que la suite existe effectivement : on étudiera plus tard les conditions d'existence de la suite en fonction de u_0.
2. Montrer que si f n'a pas de points fixes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. On suppose que f admet au moins un point fixe α. Montrer que, s'il existe un entier p tel que $u_p = \alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis que, si $p > 0$, on a également $u_{p-1} = \alpha$ et, enfin, qu'en fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. On suppose que f admet deux points fixes distincts α et β, et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$
   (b) Exprimer alors v_n en fonction de n et de u_0 puis u_n en fonction de n et u_0.
   (c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est défini, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E est l'ensemble des termes d'une certaine suite.
5. On suppose que f admet un seul point fixe α et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
   (b) Exprimer alors v_n en fonction de n et de u_0 puis u_n en fonction de n et u_0.
   (c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est défini, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E est l'ensemble des termes d'une certaine suite.

Partie II Etude de deux exemples

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
   (b) Montrer que l'équation : $\frac{4x+2}{x+5} = x$ possède deux solutions α et β avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.
   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$. Exprimer v_n en fonction de n.

(d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 12}{3u_n - 5}$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$

   (b) Montrer que l'équation : $\dfrac{7x-12}{3x-5} = x$ possède une et une seule solution réelle α.

   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$. Exprimer v_n en fonction de n.

   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.

CORRECTION : ETUDE DES SUITES HOMOGRAPHIQUES

Partie I Etude d'une suite homographique

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $c(ad-bc) \neq 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. $f(x) = x \iff cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Cette équation admet soit deux racines complexes conjuguées non réelles (si $\Delta = (d-a)^2 + 4bc < 0$), soit une solution réelle double (si $\Delta = 0$), soit deux solutions réelles (si $\Delta > 0$). Puisque $-\frac{d}{c}$ n'est pas solution de l'équation (car $ad - bc \neq 0$), les solutions réelles sont dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Ainsi

   $\boxed{\text{l'équation : } f(x) = x \text{ admet soit 1 ou 2 solutions dans } \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \text{ soit aucune solution réelle}}$

   .

   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

   On suppose pour le moment que la suite existe effectivement : on étudiera plus tard les conditions d'existence de la suite en fonction de u_0.

2. On suppose que f n'a pas de points fixes.

   Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit ℓ sa limite. On a soit $\ell = -\frac{d}{c}$ soit $f(\ell) = \ell$ car f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Or $f(\ell) = \ell$ est impossible car f n'a pas de point fixe réel.

   De plus, si $\ell = -\frac{d}{c}$, puisque $|f|$ admet $+\infty$ pour limite en $-\frac{d}{c}$, la suite de terme général $|u_{n+1}|$ divergerait vers $+\infty$ ce qui est incompatible avec la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Aussi, $\boxed{\text{si } f \text{ n'a pas de point fixe, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$

3. On suppose que f admet au moins un point fixe α. Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = \alpha$. Puisque $f(\alpha) = \alpha$, on montre par un récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n = \alpha$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire}}$.

   Par ailleurs, si $p > 0$ et $u_p = \alpha$ alors : $f(u_{p-1}) = \alpha \iff (a - c\alpha)u_{p-1} = d\alpha - b$ Donc u_{p-1} est solution d'une équation algèbrique du premier degré (car $a - c\alpha$ non nul sinon $d - b\alpha = \alpha(a - c\alpha)$ serait nul aussi et on aurait alors $ad - bc = 0$) dont α est une solution. $\boxed{\text{Aussi } u_{p-1} = \alpha}$. Par une récurrence immédiate (mais finie), on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant p \implies u_{p-n} = \alpha$. En particulier $u_0 = \alpha$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 0 c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$

4. On suppose que f admet deux points fixes distincts α et β, et que $u_0 \neq \alpha$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ est bien définie car pour tout n, $u_n \neq \alpha$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha}$. Or :

   $u_{n+1} - \beta = \frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \frac{(ad - bc)(u_n - \beta)}{(cu_n + d)(c\beta + d)}$ et de même : $u_{n+1} - \alpha = \frac{(ad - bc)(u_n - \alpha)}{(cu_n + d)(c\alpha + d)}$

   Ainsi : $v_{n+1} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}v_n$: $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}}$

   (b) On pose $k = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = k^n v_0$ et donc, comme $u_n = \frac{\alpha v_n - \beta}{v_n - 1}$, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\alpha(u_0 - \beta)k^n - \beta(u_0 - \alpha)}{(u_0 - \beta)k^n - (u_0 - \alpha)}}$.

   (c) L'expression est valable tant que u_n est défini, c'est-à-dire tant que $u_n \neq -\frac{d}{c}$. Or $u_n = -\frac{d}{c} \iff v_n = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \iff v_n = \frac{1}{k} \iff v_0 = \frac{1}{k^{n+1}} \iff u_0 = \frac{\alpha - \beta k^{n+1}}{1 - k^{n+1}}$. Donc la suite

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie sssi } u_0 \notin \left\{ \frac{\alpha-\beta k^{n+1}}{1-k^{n+1}} \middle| n\in\mathbb{N} \right\}}$ trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E est l'ensemble des termes d'une certaine suite.

5. On suppose que f admet un seul point fixe α et que $u_0 \neq \alpha$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n-\alpha}$: elle est bien définie car pour tout n, $u_n \neq \alpha$

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-\alpha}$. Or : $u_{n+1}-\alpha = \dfrac{au_n+b}{cu_n+d} - \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \dfrac{(ad-bc)(u_n-\alpha)}{(cu_n+d)(c\alpha+d)}$. De plus, puisque le discriminant est nul, on a : $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$ et $b = c\alpha^2$. Donc $c\alpha+d = \dfrac{a+d}{2}$ et $ad-bc = \dfrac{(a+d)^2}{4} = (c\alpha+d)^2$. Ainsi :
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}-v_n = \dfrac{(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(ad-bc)(u_n-\alpha)} - \dfrac{1}{u_n-\alpha} = \dfrac{(cu_n+d)(c\alpha+d)-(ad-bc)}{(ad-bc)(u_n-\alpha)} = \dfrac{c}{c\alpha+d} = \dfrac{2c}{a+d}$
   $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique de raison } \frac{2c}{a+d}}$

   (b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + \dfrac{2cn}{a+d}$ et donc, puisque $u_n = \alpha + \dfrac{1}{v_n}$, on a : $\boxed{u_n = \alpha + \frac{(a+d)(u_0-\alpha)}{a+d+2c(u_0-\alpha)n}}$
   .

   (c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est défini. Or :
   $u_n = -\dfrac{d}{c} \iff v_n = -\dfrac{2c}{a+d} \iff v_0 = -\dfrac{2c}{a+d}(n+1) \iff u_0 = \alpha - \dfrac{a+d}{2c(n+1)}$.

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie sssi } u_0 \notin \left\{ \alpha - \frac{a+d}{2c(n+1)} \middle| n\in\mathbb{N} \right\}}$

Partie II Etude de deux exemples

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5}$

   (a) Par récurrence immédiate, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$

   (b) $\dfrac{4x+2}{x+5} = x \iff x^2+x-2 = 0 \iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = -2}$

   (c) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ est bien définie car le dénominateur n'est jamais nul. De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\frac{4u_n+2}{u_n+5}-1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5}+2} = \dfrac{3u_n-3}{6u_n+12} = \dfrac{1}{2}v_n$. Ainsi la suite $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

   De plus : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^{n+2}} \text{ et } u_n = \frac{2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1}}$

   (d) D'après l'expression $u_n = \dfrac{2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1}$, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7u_n-12}{3u_n-5}$

   (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3(3u_n-5)}$. Donc par récurrence immédiate, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$. $\dfrac{7x-12}{3x-5} = x \iff 3x^2-12x+12 = 0 \iff x = 2$.

   Donc $\boxed{\text{l'équation : } \frac{7x-12}{3x-5} = x \text{ possède une et une seule solution réelle } \alpha = 2}$.

(c) On constate d'abord que, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{u_n - 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{3u_n - 5}{u_n - 2} = 3 + \dfrac{1}{u_n - 2} = 3 + v_n$.

Ainsi $\boxed{\textbf{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est arithmḿtique de raison } 3}$.

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{6n+1}{2} \textbf{ et } u_n = 2 + \dfrac{2}{6n+1}}$

(d) D'après l'expression $u_n = 2 + \dfrac{2}{6n+1}$, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } 2}$.