# Devoir surveillé N° 4 (4 heures)

Ce devoir est constitué de quatre exercices et d'un petit problème. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice n'est pas autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

## Problème : Triangle rectangle pseudo-isocèle

Dans tout le problème, on appelle triangle rectangle pseudo-isocèle (en abrégé TRPI) tout triangle rectangle dont les cotès ont pour longueurs des **entiers** de la forme $a$, $a+1$ et $c$ ( $c$ étant la longueur de l'hypoténuse). On montrera en 2c qu'il existe une infinité de TRPI : on les classe par ordre croissant des valeurs de $a$. Ainsi, le triangle de cotés $a=3$, $a+1=4$ et $c=5$ est le plus petit TRPI.

1. **Partie I : Préambule**

   (a) Si $a$ et $c$ sont des entiers naturels non nuls, montrer qu'ils définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient la relation : $(R_1)$ : $2a^2-c^2+2a+1=0$
   Le but du problème est la détermination des TRPI. On note $a_n$ et $c_n$ les longueurs du $n-$ième TRPI et on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a_1=3$ et $c_1=5$.
   Comme $a=0$ et $c=1$ vérifient la relation $(R_1)$, on pose $a_0=0$ et $c_0=1$. Les termes $a_n$ et $c_n$ sont alors définis pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (b) Ecrire un programme PYTHON permettant de trouver les valeurs successives de $a_n$ et $c_n$.
   On trouverait $a_2=20$, $c_2=29$, $a_3=119$ et $c_3=169$.

2. **Partie II : Etude de suites**

   (a) i. Montrer que pour $n=0$ et $n=1$, les termes $c_n$ vérifient une relation de la forme :
   $(R_2)$ : $c_{n+2}+\beta c_{n+1}+\lambda c_n=0$. Déterminer $\beta$ et $\lambda$.
   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0=c_0$, $v_1=c_1$ et la relation :
   $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}+\beta v_{n+1}+\lambda v_n=0$ où $\beta$ et $\lambda$ sont les constantes calculées ci-dessus.

   ii. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in\mathbb{N}$.

   iii. Déterminer $v_n$ en fonction de $n$. ( On pourra poser $p=3+2\sqrt{2}$ et $q=3-2\sqrt{2}$).

   (b) i. Montrer que pour $n=0$ et $n=1$, les termes $a_n$ vérifient une relation de la forme :
   $(R_3)$ : $a_{n+2}+\beta a_{n+1}+\lambda a_n=b$ où $\beta$ et $\lambda$ sont les constantes calculées en 2(a)i et $b$ est une constante à déterminer.
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=a_0$, $u_1=a_1$ et la relation :
   $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+\beta u_{n+1}+\lambda u_n=b$.

   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{N}$.

   iii. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=u_n+\dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite de terme général $w_n$ vérifie $(R_2)$.

   iv. En déduire $w_n$ en fonction de $n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

   Dans la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans les questions 2(b)i et 2(a)i

   (c) Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n$ et $v_n$ sont les longueurs du petit coté et de l'hypoténuse d'un TRPI.

   (d) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}=(1+2\,u_n)+\sqrt{2}\,v_n$

*La suite du problème du concours a pour objectif de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=u_n$ et $c_n=v_n$. L'établissement de ce résultat utilise des méthodes d'algèbre linéaire et de géométrie.*

## Exercice 1 : Suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.

1. (a) Etudier les variations de $f$ et déterminer le signe de $f(x) - x$ selon les valeurs de $x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, qu'en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{3}$.
   (c) Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
   (a) Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ puis $v_n$ en fonction de $v_0$ et de $n$.
   (b) Retrouver le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi que sa limite.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{3}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant \dfrac{(\varepsilon_n)^2}{2\sqrt{3}}$
   (b) En déduire une majoration de $\varepsilon_n$ en fonction de $\varepsilon_1$ et de $n$.
4. On prend $a = 2$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par les relations suivantes : $p_0 = 2$, $q_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n^2 + 3q_n^2$ et $q_{n+1} = 2p_nq_n$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$
   (b) Calculer tous les $p_k$ et $q_k$ pour $k \leqslant 4$ et donner, pour chaque entier $k \leqslant 4$, une valeur décimale approchée à $10^{-8}$ près de $u_k$
   (c) Si $u_n$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $10^{-j}$ près, que dire de l'erreur faite en prenant $u_{n+1}$ pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ ?
5. On prend encore $a = 2$. Combien suffirait-il de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une valeur approchée de sa limite avec une erreur inférieure à $10^{-100}$ ?

## Exercice 2 : Suite récurrente

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{10}{1+x^2}$ et $g$ la fonction $g = f \circ f$.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
Enfin, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x_{2n}$ et $v_n = x_{2n+1}$

1. (a) Etudier les variations de $f$ et de $g$ sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que $f$ n'a qu'un point fixe $r$. On remarquera que $r$ est un entier .
   (c) Déterminer les points fixes de $f$ et de $g$. ( On montrera que les solutions, même non réelles, de l'équation $f(x) = x$ sont aussi solution de l'équation $g(x) = x$, ce qui permettra de factoriser le polynôme de degré 5 donnant les points fixes de $g$ par $(X - r)\left(X^2 + 2X + 5\right)$ ).
   On notera $\lambda$ et $\beta$ les points fixes autres que $r$ de $g$, avec $\lambda < \beta$
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]\lambda, r[$ et $v_n \in ]r, \beta[$.
   (b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.
   (c) Que peut-on dire de la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en précisant les limites en cas de convergence.
3. Tracer la restriction de la courbe de $f$ à l'intervalle $[0, 10]$ (unité 1cm), ainsi que la détermination graphique des termes $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$ ( on donnera également des valeurs approchées de ces termes )

**Exercice 3 : Suite de zéros** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée $u_n$.
   (b) Calculer $u_1$ et $u_2$.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in ]0,1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $u_n^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la limite $\ell$.

## Exercice 4 : Suites usuelles

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\,u_n - 1$. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -5\,u_{n+1} - 6\,u_n$. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6\,u_{n+1} - 9\,u_n$. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$

# Problème : Triangle rectangle pseudo-isocèle

1. **Partie I : Préambule**

   (a) Soit $a$ et $c$ deux entiers naturels non nuls. $a$ et $c$ définissent un TRPI ssi $a$, $a+1$ et $c$ forment un triangle rectangle d'hypoténuse $c$ ssi $c^2 = a^2 + (a+1)^2$.

   Ainsi $\boxed{a \text{ et } c \text{ définissent un TRPI sssi : } (R_1) : 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0}$

   (b)

```
def TRPI(N):
  """calcul des N premiers TRPI"""
  a, cpt, ListeTRPI = 2, 0, []
  while cpt < N:
    c = int((2*a**2 + 2*a + 1)**0.5)
    if c**2 == 2* a**2 + 2*a + 1:
      cpt += 1
      ListeTRPI += [a,c]
    a += 1
  return ListeTRPI
```

   On trouverait $a_2 = 20$, $c_2 = 29$, $a_3 = 119$, $c_3 = 169$, $a_4 = 696$ et $c_4 = 985$.

2. **Partie II : Etude de suites**

   (a) i. On cherche deux réels $\beta$ et $\lambda$ tels que $\begin{cases} \lambda c_0 + \beta c_1 = -c_2 \\ \lambda c_1 + \beta c_2 = -c_3 \end{cases}$. On obtient

   $$\begin{cases} \lambda + 5\beta = -29 \\ 5\lambda + 29\beta = -169 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \lambda = 1 \\ \beta = -6 \end{cases}}$$

   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 5$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$

   ii. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $v_n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $v_{n+1} > v_n$"

   — $\mathscr{P}_0$ est-elle vraie ? On a : $v_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $v_1 = 5 \in \mathbb{N}^*$ avec $v_1 > v_0$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}$

   — On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$ est un entier relatif. Or $v_{n+1} > v_n$ donc $v_{n+2} > 5v_{n+1} \geqslant v_{n+1} > 0$.
   Donc on a bien montré que $v_{n+2}$ est un entier strictement positif et supérieur à $v_{n+1}$ (qui est encore entier naturel non nul). On en déduit que $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

   — Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_0$ est vraie et, pour tout entier $n$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que
   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_{n+1} \geqslant v_n}$

   En particulier la suite $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

   iii. D'après le résultat sur les suites récurrentes linéaires doubles, $\exists(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2 | \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \alpha p^n + \delta q^n$ avec $p = 3 + 2\sqrt{2}$ et $q = 3 - 2\sqrt{2}$ les solutions de l'équation $X^2 = 6X - 1$.
   Comme $v_0 = 1$ et $v_1 = 5$, on trouve $\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}$

   (b) i. En calculant $a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n$ pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve que ces termes $a_n$ vérifient la relation $\boxed{a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 2}$
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n = 2$.

ii. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : " $u_n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+1} > u_n$"

— $\mathscr{P}_0$ est-elle vraie ? On a : $u_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $u_1 = 3 \in \mathbb{N}^*$ avec $u_1 > u_0$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_0 \textbf{ est vraie}}$

— On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n + 2$ est un entier relatif. Or $u_{n+1} > u_n$ donc $u_{n+2} > 5u_{n+1} + 2 \geqslant u_{n+1} > 0$. Donc on a bien montré que $u_{n+2}$ est un entier strictement positif et supérieur à $u_{n+1}$ (qui est encore entier naturel non nul). On en déduit que $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$

— Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_0$ est vraie et, pour tout entier $n$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \textbf{ est vraie}}$ i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N} \textbf{ et } u_{n+1} \geqslant u_n}$

En particulier la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est croissante}}$

iii. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \dfrac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$w_{n+2} - 6w_{n+1} + w_n = u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n - 2 = 0$. Ainsi $\boxed{\textbf{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ vérifie } (R_2)}$ .

iv. D'après le résultat sur les suites récurrentes linéaires doubles, $\exists(\gamma, \omega) \in \mathbb{R}^2 | \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \gamma p^n + \omega q^n$. Comme $w_0 = \dfrac{1}{2}$ et $w_1 = \dfrac{7}{2}$, on trouve $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ et $\omega = \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4}p^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4}q^n \textbf{ et } u_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

Dans la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans les questions 2(b)i et 2(a)i

(c) On reprend les notations $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ et $v_n = \alpha p^n + \delta q^n$ et $u_n = \gamma p^n + \omega q^n - \dfrac{1}{2}$. On a : $2u_n^2 + 2u_n + 1 - v_n^2 = 2\left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} - v_n^2 = \left(2\gamma^2 - \alpha^2\right)p^{2n} + (4\gamma\omega - 2\alpha\beta)(pq)^n + \left(2\omega^2 - \beta^2\right)p^{2n} + \dfrac{1}{2}$.
Or $2\gamma^2 - \alpha^2 = 0 = 2\omega^2 - \beta^2$, $4\gamma\omega - 2\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$ et $pq = 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n^2 + 2u_n + 1 - v_n^2 = 0$. Donc, comme pour $n \geqslant 1$, les $u_n$ et $v_n$ sont des entiers strictement positifs, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n \textbf{ et } v_n \textbf{ sont les longueurs du petit coté et de l'hypoténuse d'un TRPI}}$ .

(d) On a : $\alpha = \sqrt{2}\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)$, $\beta = -\sqrt{2}\omega$ et $p = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$. Donc, si $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1+2u_n) + \sqrt{2}v_n = \left(2\gamma + \sqrt{2}\alpha\right)p^n + \left(2\omega + \sqrt{2}\beta\right)q^n = \left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$ Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} = (1+2\,u_n) + \sqrt{2}\,v_n}$$

## Exercice 1 : Suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.

1. (a) $f$ est décroissante sur $\left]0, \sqrt{3}\right]$, croissante sur $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$, atteint son minimum en $\sqrt{3}$, ce minimum valant aussi $\sqrt{3}$. Enfin $f(x) - x < 0$ si $x > \sqrt{3}$ et $f(x) - x > 0$ si $x < \sqrt{3}$.

(b) On en déduit que l'intervalle $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ est stable par $f$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \in \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$. En particulier, $u_1 \in \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ qui est stable donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{3}}$

(c) $\forall x \geqslant \sqrt{3}, f(x) \leqslant x$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{3}$, donc $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \textbf{ est décroissante}}$

(d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée à partir d'un certain rang, donc elle converge. Sa limite $\ell$ vérifie $\ell \geqslant \sqrt{3}$ et $f(\ell) = \ell$ car $f$ continue. Ainsi $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } \sqrt{3}}$ .

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

   (a) On montre aisément : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2}$. On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0^{2^n}}$ en fonction de $v_n$ puis $v_n$ en fonction de $v_0$ et de $n$.

   (b) Comme $u_0 = a > 0$, $v_0 \in ]0,1[$ : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or $u_n = \sqrt{3}\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$. Ainsi on retrouve $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } \sqrt{3}}$ .

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{3}$.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2}{2u_n} = \dfrac{\varepsilon_n^2}{2u_n} \leqslant \dfrac{(\varepsilon_n)^2}{2\sqrt{3}}$ car $u_n \geqslant \sqrt{3}$.

   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant \dfrac{(\varepsilon_n)^2}{2\sqrt{3}}}$

   (b) Par récurrence immédiate, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \varepsilon_n \geqslant 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{3}}\right)^{2^{n-1}}}$.

4. On prend $a = 2$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par les relations suivantes : $p_0 = 2$, $q_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n^2 + 3q_n^2$ et $q_{n+1} = 2p_nq_n$.

   (a) Par récurrence immédiate, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{p_n}{q_n}}$

   (b) On trouve : $p_1 = 7$, $q_1 = 4$, $p2 = 97$, $q_2 = 56$, $p_3 = 18817$, $q_3 = 10864$, $p_4 = 708158977$ et $q_4 = 408855776$ et donc
   $u_1 = 1,75$ , $u_2 = 1,73214286$ à $10^{-8}$ près , $u_3 = 1,73205081$ à $10^{-8}$ près et $u_4 = 1,73205081$ à $10^{-8}$ près

   (c) Si $u_n$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $10^{-j}$ près, alors $\varepsilon_n \leqslant 10^{-j}$. Mais alors $\varepsilon_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{3}}10^{-2j} \geqslant 3.10^{-(2j+1)}$

   $\boxed{\textbf{Si } u_n \textbf{ est une valeur approchée de } \sqrt{3} \textbf{ à } 10^{-j} \textbf{ près, } u_{n+1} \textbf{ en est une à } 10^{-2j} \textbf{ près}}$

5. On prend encore $a = 2$. On cherche $N$ tel que si $n \geqslant N$, $2\sqrt{3}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{3}}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 10^{-100}$. On aura cela lorsque $2^{n-1} \geqslant \dfrac{100\ln 10 + \ln\left(2\sqrt{3}\right)}{\ln\left(2\sqrt{3}\right) - \ln\left(\sqrt{3}-1\right)} = 89.4$ à $10^{-1}$ près. Ainsi $\boxed{\textbf{il suffit de calculer 8 termes}}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{3}$ avec une erreur inférieure à $10^{-100}$

## Exercice 4 : Suites usuelles

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\,u_n - 1$. On trouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(3^n + 1\right)}$

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -5\,u_{n+1} - 6\,u_n$. On trouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5\,(-2)^n - 4\,(-3)^n}$

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6\,u_{n+1} - 9\,u_n$. On trouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \dfrac{n}{3}\right)3^n}$

# Exercice 2 : Suite récurrente

2) **Cas d'une fonction décroissante** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ et g la fonction $g = f \circ f$

**a)** Déterminer les points fixes de f et de g (*on montrera que les solutions (même complexes) de l'équation f(x) = x sont aussi solution de l'équation g(x) = x*) On notera r la racine réelle de f (*on remarquera r entier*) et $\lambda$ et $\beta$ les deux points fixes de g autres que r (avec $\lambda<\beta$)

**L'équation $f(x) = x$ a pour solution réelle $r = 2$** et deux solutions complexes : $-1+2i$ et $-1-2i$

Pour l'équation $g(x) = x$, on remarque que l'on peut factoriser par $(x-2)(x^2+2x+5)$.

On trouve alors que **les solutions réelles de $g(x) = x$ sont : $r = 2$, $\lambda = 5-2\sqrt{6}$ et $\beta = 5+2\sqrt{6}$**

**b)** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = x_{2n}$ et $v_n = x_{2n+1}$.

**i)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in ]\lambda,r[$ et $v_n \in ]r,\beta[$

On montre, aisément, que f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs on a :

$f(\,]\lambda, r[\,) \subset\, ]r, \beta[$ , $f(\,]r, \beta[\,) \subset\, ]\lambda, r[$ et $f(\lambda) = \beta$ et $f(\beta) = \lambda$ Ainsi, les intervalles $]r, \beta[$ et $]\lambda, r[$ sont stables par $g = f \circ f$ . Ainsi, comme on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$ , $v_{n+1} = g(v_n)$ , $u_0 = 1 \in\, ]\lambda, r[$ et $v_0 = 5 \in\, ]r, \beta[$ , on a par récurrence immédiate : **$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in ]\lambda,r[$ et $v_n \in ]r,\beta[$**

**ii)** Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones

Puisque g est croissante sur $]\lambda, r[$, que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in ]\lambda,r[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, on a **: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone**

De plus comme : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5}{13}$ , on a donc **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.**

Puisque f est décroissante et que l'on a $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = f(u_n)$, on en déduit que **$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.**

**iii)** Déterminer la nature (et les limites éventuelles) des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

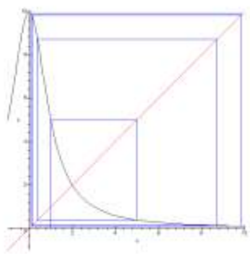
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\lambda > 0$, elle converge. Sa limite $\ell_1$ est dans$[\lambda,r]$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in ]\lambda,r[$ et vérifie : $\ell_1 < 1 = u_0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $g(\ell_1) = \ell_1$ car g est continue.

Ainsi, puisque la seule solution de l'équation $g(x) = x$ qui soit inférieure à 1 est $\lambda$, on en déduit que $\ell_1 = \lambda$

**Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda = 5-2\sqrt{6}$**

Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = f(u_n)$ et puisque f est continue en $\lambda$, **$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\lambda) = \beta = 5+2\sqrt{6}$**

On a trouvé deux suites extraites de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite, donc on a : **$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente**



**iv)** Tracer la restriction de la courbe de f à l'intervalle [0,10] (unité 1 cm) ainsi que la détermination graphique des termes $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$ (vous donnerez également des valeurs approchées de ces termes)

On obtient les valeurs approchées suivantes : $x_0 = 1$ , $x_1 = 5$ , $x_2 = 0{,}38$ à $10^{-2}$ près , $x_3 = 8{,}71$ à $10^{-2}$ près , $x_4 = 0{,}13$ à $10^{-2}$ près , $x_5 = 9{,}83$ à $10^{-2}$ près , $x_6 = 0{,}10$ à $10^{-2}$ près , $x_7 = 9{,}90$ à $10^{-2}$ près

# CORRECTION : Suite de zéros - $x^n + 9x^2 = 4$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ par: $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

**1) a)** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une solution strictement positive, notée $u_n$

La fonction $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car somme de fonctions croissantes dont au moins une (la fonction $x \to 9x^2$ est strictement croissante). De plus elle est continue car il s'agit d'un polynôme. Enfin, $f_n(0) = -4$ et la limite de $f_n$ en $+\infty$ est $+\infty$.

Aussi par théorème d'homéomorphisme, $f_n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[-4, +\infty[$

En particulier, **l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution $u_n$ dans $\mathbb{R}^+$, et cette solution n'est pas 0** car $f_n(0) \neq 0$

**b)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

Les équations $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$ sont deux équations du second degré qui se résolvent facilement.

On trouve alors : **$u_1 = \frac{\sqrt{145}-1}{18}$ et $u_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}$**

**c)** Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n \in ]0, \frac{2}{3}[$.

$f_n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^n}{3^n} > 0 = f_n(u_n)$ donc $u_n < \frac{2}{3}$. Ainsi : **$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n \in ]0, \frac{2}{3}[$.**

**2) a)** Montrer que: $\forall x \in ]0,1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

$\forall x \in ]0,1[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) < 0$ **Donc : $\forall x \in ]0,1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$**

**b)** En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$f_n(u_{n+1}) = f_n(u_{n+1}) - f_{n+1}(u_{n+1}) > 0$ d'après la question précédente car $u_{n+1} \in ]0,1[$

D'où $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$. Donc puisque $f_n$ croissante, on en déduit : $u_{n+1} > u_n$

**Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante**

**c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note *l* sa limite.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle converge. Sa limite $\ell$ étant entre 0 et $\frac{2}{3}$

**3) a)** Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Puisque : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (u_n)^n = 4 - 9u_n^2$ , on a **$(u_n)^n$ tend vers $4 - 9\ell^2$** lorsque n tend vers $+\infty$

Par ailleurs, puisque : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant (u_n)^n \leqslant \frac{2^n}{3^n}$ , on a également **$(u_n)^n$ tend vers 0** lorsque n tend vers $+\infty$

**b)** Donner enfin la limite *l*. Par unicité de la limite, on a : $4 - 9\ell^2 = 0$ et **donc $\ell = \frac{2}{3}$**