Devoir en temps libre n° 8

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Equations fonctionnelles des fonctions usuelles

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$

2. (a) Montrer, en étudiant la fonction $t \to \ln(bt) - \ln(t)$ et en utilisant le fait que ln est la primitive de $t \to \dfrac{1}{t}$ s'annulant en 1 , que la fonction ln vérifie : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

   (b) Montrer que $\log_a$ (définie par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ où a est un rél strictement positif et différent de 1) vérifie : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

   (c) Montrer, en utilisant le fait que exp est la bijection réciproque de ln, que la fonction exp vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$

   (d) Montrer que les fonctions exponentielles (les fonctions $t \to a^t$), vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$

   (e) Montrer que les fonctions puissances vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\, y) = f(x)\, f(y)$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$ (exprimer $f(x)$ en fonction de $x/2$)

   (b) Montrer que f est soit la fonction nulle soit une fonction ne s'annulant jamais

   (c) Dans le cas où f ne s'annule jamais, déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par $g = \ln \circ f$

   (d) Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$

4. Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\, y) = f(x) + f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

5. Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\, y) = f(x)\, f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

6. On pose, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a, b) = \arctan(a) + \arctan(b)$

   (a) On suppose $a > 0$. Montrer que :

      i. Si $ab = 1$, alors $f(a, b) = \dfrac{\pi}{2}$

      ii. Si $ab < 1$, alors $f(a, b) = \arctan\left(\dfrac{a + b}{1 - ab}\right)$

      iii. Si $ab > 1$, alors $f(a, b) = \arctan\left(\dfrac{a + b}{1 - ab}\right) + \pi$

   (b) En déduire les expressions de $f(a, b)$ lorsque $a \leqslant 0$