Devoir en temps libre n° 9

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Étude de la dérivée énième de la fonction arctangente

On rappelle qu'une fonction est un polynôme (ou une fonction polynomiale) de degré $n \in \mathbb{N}$ si c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ avec $(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x)$

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
   Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe un polynôme Q_n de degré inférieur ou égal à $n-2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (-1)^{n-1}\, n!\, x^{n-1} + Q_n(x)$.
   En déduire le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n pour $n \geqslant 2$ entier naturel.

   (b) Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \left(1+x^2\right) f''(x) + 2xf'(x)$.
   Calculer $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $h^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)\, f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x) = 0$

   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) + 2(n+1)xP_{n+1}(x) + n(n+1)\left(1+x^2\right) P_n(x) = 0$

3. En utilisant les relations établies en 1 et 2d, montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$

Partie II

1. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

   ☛ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ et $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, g(\alpha_i) = 0$

   ☛ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

   (a) Montrer que : $\exists\, (\beta_0, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_0 < \alpha_1$ et $\alpha_k < \beta_k$ tels que $g'(\beta_0) = g'(\beta_k) = 0$

   (b) Montrer que : $\exists\, (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ avec $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{k-1} < \beta_{k-1} < \alpha_k$ tels que $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\},\ g'(\beta_i) = 0$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ fixé.

   (a) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels distincts.

   (b) Montrer que P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles disctinctes.

3. (a) Etablir par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (n-1)!\, \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

   (b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(f(x)) > 0$. Déterminer les racines réelles de $f^{(n)}$ pour $n \geqslant 2$

   (c) En déduire la factorisation de P_n lorsque $n \geqslant 2$

Partie III

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C},\ x \to \dfrac{1}{x+a}$.
   Déterminer $\varphi^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. (a) Montrer que : $\exists b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,\big|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x+b}\right)$

   (b) Déterminer alors $f^{(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$ (d'abord sous forme complexe puis sous forme réelle)

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}\ (n-1)! \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p\, x^{n-1-2p}$

Partie IV On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Étudier les variations de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$. Déterminer en particulier $M = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f''(x)\big|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\left|f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{k^2}{2n^4}M$

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{M}{2n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Déterminer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$