DERIVATION DES FONCTIONS DE ℝ VERS ℝ

A DERIVEE EN UN POINT , FONCTION DERIVEE

I) Définitions

Définition: Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ vers ℝ. Soit t_0 un point de I.

Soit φ la fonction définie sur I \{t_0} par: $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ (taux de variation).

On dit que f est **dérivable** en t_0 si φ possède une limite en t_0.
On appelle cette limite "**nombre dérivé en t_0**" et on la note $f'(t_0)$ (certaines fois, particulièrement en physique on emploie également les notations $Df(t_0) = \dfrac{df}{dt}(t_0)$)

Définition: On dit que f est **dérivable à droite** (resp: **à gauche**) en t_0 si φ possède une limite à droite (resp: à gauche) en t_0. On note $f_d'(t_0)$ et $f_g'(t_0)$ ces dérivées à droite et à gauche.

Propriété: P_1: Si $f_d'(t_0)$ et $f_g'(t_0)$ existent. $f'(t_0)$ existe $\Leftrightarrow f_d'(t_0) = f_g'(t_0)$

Propriété: P_2: Si f est dérivable en t_0 , f est continue en t_0

Dem: Si $f'(t_0)$ existe on a pour $t \neq t_0$: $\varphi(t) - f'(t_0) = \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$

D'où: $f(t) - f(t_0) = (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$. Ce qui prouve la continuité de f en t_0

Remarque: L'écriture $f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$ est appelé développement limité de f à l'ordre 1

Interprétation géométrique: $f'(t_0)$ représente la pente de la tangente, position limite des cordes.

Interprétation physique: Lorsque l'on veut étudier le comportement au voisinage d'un point, on "assimile" une fonction f à la fonction affine. C'est par exemple le principe de la "linéarisation" souvent rencontré en Physique (ou SI). Autre exemple, en optique, pour des petits angles, on assimile sin(x) à x…
Autre utilisation : le principe de la méthode numérique de recherche de zéros d'une fonction due à Newton, consiste à assimiler le gaphe de f à celui de sa tangente en un point.

Exercice: Etudier la fontion sinus cardinal sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Définition: Soit f définie sur I. On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction qui à t_0 associe le nombre dérivé $f'(t_0)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f et se note **f'** ou encore Df ou $\dfrac{df}{dt}$

II) Opérations sur les dérivées, théorèmes fondamentaux

Théorème: Th_1: Si f dérivable sur I alors f est continue sur I.

Dem: On l'a faite en un point précédemment d'où le théorème

a) Dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une puissance

Théorème: Th_2: Soient f et g deux fonctions définies sur I, λ et μ deux réels, et n un entier naturel. On suppose que f et g sont dérivables en un point t_0 (resp. sur I)
Alors $\lambda f + \mu g$, $f \times g$ et f^n sont dérivables en t_0 (resp. sur I) de dérivées respectives: $\lambda f' + \mu g'$, $f' \times g + f \times g'$ et $n f' \times f^{n-1}$

Dem: ☞ On écrit $f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t)$ et $g(t) = g(t_0) + (t - t_0) g'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t)$ avec ε_1 et ε_2 de limite 0 en t_0 . Soit $h = \lambda f + \mu g$ On a: $h(t) = h(t_0) + (t - t_0)(\lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0)) + (t - t_0)(\lambda \varepsilon_1(t) + \mu \varepsilon_2(t))$ D'où le taux de variation de h en t_0 possède une limite et on a: $h'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0)$. De même sur I

☞ Avec les notations précédentes, on a: $f(t)g(t) = f(t_0)g(t_0) + (t-t_0)(f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)) + (t-t_0)\varepsilon(t)$
avec $\varepsilon(t) = f(t_0)\varepsilon_2(t) + g(t_0)\varepsilon_1(t) + (t-t_0)[f'(t_0)g'(t_0) + \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t) + f'(t_0)\varepsilon_2(t) + g'(t_0)\varepsilon_1(t)]$

Or $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0. Aussi f g est dérivable en t_0 et a pour dérivée: $f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$

☞ Soit P_n la propriété: f^n est dérivable et sa dérivée est $n\ f' \times f^{n-1}$.
P_1 est vraie. Si P_n est vraie alors on a f^{n+1} est le produit de deux fonctions dérivables f et f^n, donc elle est dérivable et sa dérivée est: $f'f^n + f(f^n)'$ soit $f' \times f^n + n\ f \times f'\ f^{n-1}$
Donc P_{n+1} est vraie. Aussi P_n est vraie pour tout n non nul et on a bien le résultat énoncé.

b) Dérivation d'un inverse, d'un quotient

Théorème: Th_3: Si f dérivable en t_0 (resp: sur I) et n'est pas nulle en t_0 (resp: sur I), alors f ne s'annule pas au voisinage de t_0 et l'application inverse est dérivable de dérivée: $-\dfrac{f'(t_0)}{f^2(t_0)}$

Dem: Soit $f(t_0) = A \neq 0$. Par continuité de f en t_0, il existe un voisinage J de t_0 tel que $\forall t \in J$, $|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{1}{2}|f(t_0)|$

Ainsi sur ce voisinage, f est du signe de $f(t_0)$ et ne s'annule pas. On définit alors sur J la fonction $g : t \to \dfrac{1}{f(t)}$.

On écrit $f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$. On a alors: $g(t) - g(t_0) = -\dfrac{(t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)}{f(t_0)[f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)]}$

Ainsi pour $t \neq t_0$ on a: $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = -\dfrac{f'(t_0) + \varepsilon(t)}{f(t_0)[f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)]}$

Mais le numérateur tend vers $-f'(t_0)$ et le dénominateur vers $f^2(t_0)$. D'où le résultat annoncé.

Corollaire: Si f dérivable en t_0 (resp: sur I) et n'est pas nulle en t_0 (resp: sur I), alors f^{-n} est dérivable et de dérivée $-n\ f' \times f^{-n-1}$ (avec n entier naturel)

Corollaire: Si f dérivable en t_0 (resp: sur I) et n'est pas nulle en t_0 (resp: sur I), et si g est dérivable en t_0 (resp: sur I), alors le quotient de g par f est dérivable en t_0 (resp: sur I) de dérivée $\dfrac{g'f - f'g}{f^2}$

Corollaire: Si f dérivable en t_0 (resp: sur I) et n'est pas nulle en t_0 (resp: sur I), si g est dérivable en t_0 (resp: sur I) et si n est un entier naturel, alors le quotient de g par f^n est dérivable en t_0 (resp: sur I) de dérivée $\dfrac{g'f - n f'g}{f^{n+1}}$

Dem: On utilise les formules de dérivation d'un inverse, d'un produit et d'une puissance

c) Dérivation d'une composée

Théorème: Th_4: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $t_0 \in I$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$ et dérivable en $f(t_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en t_0 de dérivée: $f'(t_0) \times g'(f(t_0))$

Dem: On écrit $f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t)$ et $g(u) = g(u_0) + (u - u_0) g'(u_0) + (u - u_0)\varepsilon_2(u)$ avec ε_1 et ε_2 de limite 0 en t_0 et ε_2 de limite 0 en $u_0 = f(t_0)$. Comme f est continue en t_0, $f(t)$ tend vers u_0 lorsque t tend vers t_0. Soit $u = f(t)$ et $h = g \circ f$. On a: $h(t) - h(t_0) = (t - t_0)[f'(t_0) + \varepsilon_1(t)][g'(f(t_0)) + \varepsilon_2(f(t))]$

Ainsi $\dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$ tend vers $f'(t_0)\, g'(f(t_0))$ lorsque t tend vers t_0

d) Dérivation de la réciproque d'une bijection

Théorème: Th_5: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ bijection continue de I sur $J = f(I)$. Soit $g : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f dérivable en t_0 (resp: sur I) de dérivée non nulle en t_0 (resp: sur I), alors g est dérivable en $x_0 = f(t_0)$ (resp: sur J) de dérivée $g'(f(t_0)) = \dfrac{1}{f'(t_0)}$ ou $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

Dem: On écrit $f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$ avec ε de limite 0 en t_0. Pour $t \in I$, on pose $x = f(t) \Leftrightarrow t = g(x)$.
On a $\forall x \in J$, $x - x_0 = f(g(x)) - f(g(x_0)) = [g(x) - g(x_0)][f'(g(x_0)) + \varepsilon(g(x))]$

f étant continue en t_0, t tend vers t_0 sssi x tend vers x_0 donc $\varepsilon(g(x))$ a pour limite 0 en x_0. Aussi, puisque $f'(t_0)\neq 0$, $f'(t_0)+\varepsilon(g(x))\neq 0$ sur un voisinage de x_0. Sur ce voisinage, on a alors: $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{f'(t_0)+\varepsilon(g(x))} = \frac{1}{f'(t_0)} + \varepsilon_2(x)$ où ε_2 de limite 0 en x_0. On obtient la formule désirée lorsque x tend vers x_0.

Remarque: La tangente au graphe de la bijection réciproque en (a, b) est la symétrique par rapport à la première bissectrice de la tangente au graphe de f en (b, a)

B PROPRIETES DES FONCTIONS DERIVABLES

I) Extremum local

Définition: Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a\in A$. On dit que a est un **point intérieur** à A ssi $\exists r>0 \mid [a-r, a+r] \subset A$

Définition: Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle **intérieur de A**, et on note $\overset{o}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemple: Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overset{o}{I}$ est l'intervalle I privé de ses bornes.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a\in I$. On dit que a est **un maximum local** ssi $\exists r>0 \mid \forall x\in I,\ |x-a|\leq r \Rightarrow f(x)\leq f(a)$

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a\in I$. On dit que a est **un minimum local** ssi $\exists r>0 \mid \forall x\in I,\ |x-a|\leq r \Rightarrow f(x)\geq f(a)$

Définition: Un **extremum local** est un minimum local ou un maximum local

Définition: Si f dérivable sur I et si $a\in I$, on dit que **le point a est un point critique de f** ssi $f'(a)=0$

Propriété: Soit f une fonction dérivable sur I et t_0 est un point intérieur à I. Si t_0 est un extremum local de f alors t_0 est un point critique de f.

Dem: Si $f(t_0)$ extrémal, $f(t)-f(t_0)$ garde un signe constant au voisinage t_0 : $\varphi(t) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est d'un certain signe avant t_0 et d'un autre après. Donc la limite de φ (qui existe) ne peut être que 0

Remarque: La condition $f'(a)=0$ n'est pas suffisante pour avoir un extremum local.

II) Théorème de ROLLE

Théorème: Théorème de Rolle Soient a<b. Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[et vérifiant $f(a)=f(b)$. Alors $\exists\, c\in]a,b[\mid f'(c)=0$

Dem: f est continue sur le segment [a,b] donc elle est bornée est atteint ses bornes.
Soient α et β les extrema ($\alpha\leq\beta$) de f sur [a,b].

Cas 1 : $\alpha=\beta$. Dans ce cas f est constante sur [a,b] et donc $\forall\, t\in]a,b[$, $f'(t)=0$ car en tout point le taux de variation est nul donc de limite nulle.

Cas 2 : $\alpha<\beta$. Dans ce cas l'un des deux (ou les deux) diffère de $f(a)=f(b)$. On suppose par exemple que $f(a)\neq\beta$.
β étant atteint, $\exists c\in]a,b[\mid \beta = f(c)$. On va montrer que $f'(c)=0$.

On considère le taux de variation $\varphi(t) = \frac{f(t)-f(c)}{t-c}$. Comme f est dérivable en c, on sait que ce taux admet $f'(c)$ pour limite à gauche et à droite en c. Or $\forall t\in]a,b[$ $f(t)\leq f(c)=\beta$. Donc

- $\forall t\in]a,b[$ avec $t<c$, $\varphi(t)\geq 0$. D'où la limite à gauche de φ en c (qui existe et vaut $f'(c)$) est positive (passage à la limite dans une inégalité large). Donc $f'(c)\geq 0$
- $\forall t\in]a,b[$ avec $t>c$, $\varphi(t)\leq 0$. D'où la limite à droite de φ en c (qui existe et vaut $f'(c)$) est négative (passage à la limite dans une inégalité large). Donc $f'(c)\leq 0$

Ainsi $f'(c)=0$. On fait la même chose si $f(a)=\beta$ avec α.

Remarque: "Rolle" dit qu'il existe au moins un $c\in]a,b[$ où la dérivée s'annule. Mais il ne dit rien quant à l'unicité de c : il peut même y en avoir une infinité.

Exemple: La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x \sin(^1/_x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Corollaire: Avec l'hypothèse supplémentaire : f (a) = f(b) = 0 , on a : Si f continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[, entre deux zéros de f sur [a,b], il y au moins un zéro de f '

Exercice: Généraliser le théorème de Rolle pour les fonctions continues sur $[a, +\infty[$, dérivables sur $]a,+\infty[$ et telles que $f(a) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$

III) Théorème des accroissements finis

Théorème: Egalité des accroissements finis Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors $\exists$ c $\in$]a,b[| f (b) – f (a) = (b – a) f ' (c) .

Interprétation géométrique: Il existe un point (c,f(c)) sur l'arc (AB) délimité par a et b du graphe de f où la tangente est parallèle à la corde.

Interprétation cinématique: Il existe un instant c entre a et b où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

Dem: On applique le théorème de Rolle à la fonction $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, définie par : $g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$ où $y = \alpha x+\beta$ est l'équation de la corde [A,B].

Inégalité des accroissements finis

Définition: Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $K\in\mathbb{R}_+$. On dit que f est **lipschitzienne de rapport K** (ou **K-lipschitzienne**) si et seulement si : $\forall(x,x')\in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leq K |x - x'|$

Définition: Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est **lipschitzienne** si $\exists$ K | f est K–lipschitzienne

Définition: On dit que f est **contractante** ssi $\exists$ K<1 | f est K–lipschitzienne

Théorème: Inégalité des accroissements finis Soit f une fonction continue sur [a,b], dérivable sur I=]a,b[. Si $\forall$ t $\in$I, $m \leq f\,'(t) \leq M$, alors $m (b - a) \leq f (b) - f (a) \leq M (b - a)$.

Dem: On utilise l'égalité des accroissements finis pour obtenir l'existence d'un point c dans I tel que : $f\,'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Or on a : $m \leq f\,'(c) \leq M$ donc en multipliant par (b – a) on a bien l'encadrement annoncé

Corollaire: Avec l'hypothèse supplémentaire : $\forall t\in I$, $|f\,'(t)| \leq K$, on a : *f* K –lipschitzienne sur I.

IV) Application du théorème des accroissements finis

Théorème: Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors f est constante sur [a,b] si et seulement si $\forall$ t $\in$]a,b[, f '(t) = 0

Dem: **(1) ⇒ (2)** Si f est constante sur [a,b] alors en tout point le taux de variation est nul donc de limite nulle. Aussi f est de dérivée nulle en tout point.

(2) ⇒ (1). Soit $t_0 \in]a,b[$. Nous allons montrer que $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = f(t_0)$.
Soit d'abord $t \in]a,b[$, $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(t) = f(t_0) + (t-t_0)\, f\,'(c)$ (accroissements finis).
Or $f\,'(c) = 0$. D'où $\forall t \in]a,b[$, $f(t) = f(t_0)$. Par continuité de f on en déduit $f(a) = f(b) = f(t_0)$.

Théorème: Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors : f est croissante sur [a,b] si et seulement si $\forall t\in]a,b[$, $f\,'(t) \geq 0$

Dem: **(1) ⇒ (2)** Si f est croissante sur [a,b]. Soit c un point de]a,b[. Soit φ la fonction définie sur [a,b] \ {c} par : $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$. Puisque f est croissante sur [a,b], f(t) – f(c) est du signe de t – c.

En particulier on a : $\forall t\in[a,b]\setminus\{c\}$, $\varphi(t) \geq 0$. Aussi la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers c est positive (cette limite existe car f est dérivable en c). Aussi $f\,'(c) \geq 0$. Ce résultat étant vrai pour tout c dans]a,b[.

(2) ⇒ (1). Soit $(t_0, t_1) \in [a,b]^2$ avec $t_0 < t_1$.

D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c dans $]t_0, t_1[\subset]a,b[$, tel que $f(t_1) - f(t_0) = (t_1 - t_0) f'(c)$.

Or $f'(c) \geq 0$, donc $f(t_1) \geq f(t_0)$: f est bien croissante.

Théorème: Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors f est strictement croissante sur [a,b] si et seulement si $\forall t \in]a,b[$, $f'(t) \geq 0$ et il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide inclus dans]a,b[sur lequel f ' est la fonction nulle

Dem: **(1) ⇒ (2)** Si f est strictement croissante sur [a,b], alors f est croissante et il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans]a,b[sur lequel f est constante. D'où le résultat annoncé.

(2) ⇒ (1). On sait déja d'après le théorème précédent que f est croissante sur [a,b].

Si f n'était pas strictement croissante. Il existerait un couple (c,d) d'éléments de [a,b] avec $c < d$ et $f(c) \geq f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f(c) = f(d)$ et même $\forall t \in [c,d]$, $f(t) = f(c)$. Mais alors]c,d[est un intervalle ouvert non vide inclus dans]a,b[sur lequel f' est la fonction nulle. Ce qui est impossible. Donc f est strictement croissante sur [a,b].

Corollaire: Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[.
1) f est décroissante sur [a,b] si et seulement si $\forall t \in]a,b[$, $f'(t) \leq 0$
2) f est strictement décroissante sur [a,b] si et seulement si $\forall t \in]a,b[$, $f'(t) \leq 0$ et il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans]a,b[sur lequel f ' est la fonction nulle

Dem: On travaille avec – f....

Théorème: Soit f une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. On suppose que [a,b] et stable par f et que f est K – contractante sur [a,b] (donc K < 1). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors : il existe un et un seul point fixe α de f sur [a,b] et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Dem: L'application $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \to f(x) - x$ est continue. Or $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g possède au moins un zéro α dans [a,b] et ce zéro de g est un point fixe de f.

L'unicité de ce point fixe provient de la relation : $\forall x \in [a,b]\backslash\{\alpha\}$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq K\,|x - \alpha| < |x - \alpha|$

Enfin, puisque [a,b] est stable par f, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.

Puisque f est contractante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq K\,|u_n - \alpha|$, donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq K^n\,|u_0 - \alpha|$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Théorème de la limite de la dérivée: Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur I\{a}. On suppose que f ' possède une limite ℓ finie ou infinie en a. Alors $\lim\limits_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \ell$

En particulier, si ℓ est finie, f est dérivable en a et f ' est continue en a

Dem: Soit $t \in I\backslash\{a\}$ avec $t > a$. Il existe $c \in]a,t[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$.

Lorsque t tend vers a, c tend aussi vers a donc f '(c) tend vers la limite ℓ de f ' en a.. De même pour $t < a$.

Ainsi le taux de variation $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ tend vers ℓ lorsque t tend vers a.

En particulier si ℓ est finie, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell = \lim\limits_{t\to a} f'(t)$: f ' est bien continue en a.

Exercice: La fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 \to 0$ est-elle dérivable en 0 ?

C DERIVEE D'ORDRE SUPERIEUR

I) Définitions

Définition: Si f ' est dérivable en t_0, on appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de la dérivée de f et on la note: $f''(t_0)$. f '' peut encore être dérivable et on appelle $f^{(3)}$ sa dérivée. Par itérations successives, on crée $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f notée aussi $D^n f$ ou $\frac{d^n f}{dt^n}$. Par convention, on note $f = f^{(0)}$

Notation: On note $\mathcal{D}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(t_0)$, l'ensemble des fonctions dérivables n fois sur I, en t_0.

On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables n fois sur I dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue sur I

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables à tout ordre sur I.

Définition: Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, n fini ou infini, on dit que **f est de classe $\mathcal{C}^n$** sur I.

II) Opérations sur les dérivées énièmes

Propriété: $\mathcal{C}^n(I)$, n fini ou infini, est un espace vectoriel, en particulier les combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^n$

Dem: Par linéarité de la dérivation, la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées $n^{\text{ièmes}}$

Théorème: Formule de Leibniz Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}^n(I)$ alors le produit $h = f \times g$ appartient aussi à $\mathcal{D}^n(I)$ et de plus $$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Dem: Soit P_n : " Si f et g sont dans $\mathcal{D}^n(I)$ alors $h = fg$ est dans $\mathcal{D}^n(I)$ et $h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ "

P_1 est vraie car le produit de fonctions dérivables est dérivable et la dérivée a la forme désirée

Si P_n est vraie . On prend f et g dérivables n + 1 fois et $h = f \times g$.

Puisque f et g sont n fois dérivable , on sait déja que h est n fois dérivable et que $h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Or tous les $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ intervenant dans la somme sont encore au moins une fois dérivable, donc $h^{(n)}$ est encore dérivable. En dérivant $h^{(n)}$ on trouve alors : $h^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}]$

D'où : $h^{(n+1)} = \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$ Aussi P_{n+1} vraie.

Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n vraie

Théorème: (i) Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et ne s'annule pas sur I, son inverse est dans $\mathcal{C}^n(I)$

(iii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ est bijective et si f ' non nulle sur I alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$

Dem: On procède par itérations successives. Remarque pour (iii) , on écrit $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$ et on dérive n–1 fois.

Théorème de classe $\mathscr{C}^n$ par prolongement: Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I\{a} et telle que, pour tout $k \leq n$, $f^{(k)}$ possède une limite finie en a. Alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^n$ sur I

Dem: On utilise le théorème de limite de la dérivée ainsi qu'une récurrence (finie). D'abord, on remarque que f est prolongeable par continuité en a. On appelle g le prolongement continu et on note b_k les limites de $f^{(k)}$.
Soit P_k : " g est de classe $\mathscr{C}^k$ " .
On vient de voir P_0 vraie.
Si P_k vraie avec $0 \leq k < n$. On pose $h = g^{(k)}$. On a h dérivable et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur I\{a} et h' posséde b_{k+1} pour limite en a. Donc d'après le théorème de limite de la dérivée, h de classe $\mathscr{C}^1$ sur et donc g est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.

n = 0, on a f prolongeable par continuité en a. Dans la suite on supposera n > 0.
S $\in$]a,b]. Il existe c $\in$]a,t[tel que : $f'(c) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$.
Lorsque t tend vers a, c tend aussi vers a donc f '(c) tend vers la limite m de f ' en a.
Ainsi le taux de variation $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ tend vers m lorsque t tend vers a : f est dérivable en a et $f'(a) = m = \lim\limits_{t \to a} f'(t)$:

f ' est bien continue sur [a,b] donc f est de classe C^1 sur [a,b]

D Derivation des Fonctions Complexes

Définition: Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$.
f est **dérivable en a** $\Leftrightarrow \left(t \to \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)$ possède une limite finie en a
On appelle **nombre dérivé de f en a** cette limite et on la note f '(a)
Propriété: Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$, $a \in I$. f dérivable en a ssi Re(f) et Im(f) sont dérivables en a. Le cas échéant , $f'(a) = (Re(f))'(a) + i\,(Im(f))'(a)$
Définition: Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$.On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I
On appelle dérivée de f la fonction de i vers $\mathbb{C}$ qui a t associe f'(t)

On définit de même les dérivées k-ièmes $f^{(k)}$ de f en a
On note $\mathscr{D}^k(I)$ l'algèbre des fonctions f telle que $f^{(k)}$ existe sur I
On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'algèbre des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ($f^{(k)}$ existe et est continue sur I)
et $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'algèbre des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

Théorème: Formule de Leibniz Si *f* et *g* appartiennent à $\mathscr{D}^n(I)$ alors le produit

$h = f \times g$ appartient aussi à $\mathscr{D}^n(I)$ et de plus $h^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Dem: Comme pour $\mathbb{R}$
Théorème: Soit *f* une fonction continue sur le segment [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors *f* est constante sur [a,b] si et seulement si $\forall$ t $\in$[a,b], $f'(t) = 0$
Dem: f constante sur [a,b] $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) constantes sur [a,b]
Puis on utilise la caractérisation des fonctions réelles constantes.

Remarque: Par contre le théorême de Rolle ne se prolonge pas
Exemple: $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \to e^{it} - 1$, vérifie les hypothèses de Rolle mais pas ses conclusions