MPSI 15-16 Feuille n^{o} 12 : Fonctions dérivables

Du 07/12/15 au 15/12/15

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions f définies par :

1. $f(t) = \dfrac{(1+t^2)\arctan(t) - t}{2}$
2. $f(t) = \ln(t)\log_{10}(t) - \ln(a)\log_a(t)$
3. $f(t) = \dfrac{3}{\operatorname{th}(t)\ln(t)}$
4. $f(t) = (3 - 2\sin(t))^5$
5. $f(t) = \sqrt{\operatorname{cotan}(t)}$
6. $f(t) = \sqrt[3]{\sin(t)}$
7. $f(t) = \sqrt{1 + \arcsin(t)}$
8. $f(t) = \sqrt{\dfrac{3\sin(t) - 2\cos(t)}{1 + \sin^2(t)}}$
9. $f(t) = \arccos\left(e^t\right)$
10. $f(t) = \ln(\arctan(t)) + \arctan(\ln(t))$
11. $f(t) = \arccos\left(t^2\right) + \arcsin\left(t^2\right)$
12. $f(t) = \dfrac{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}{t}$
13. $f(t) = \ln(\arccos(5t))$
14. $f(t) = \ln\left(\ln\left(3t^2 - 2\right)\right)$
15. $f(t) = \ln(\arctan(t))$
16. $f(t) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{t^2+1} + t}{\sqrt{t^2+1} - t}\right)$
17. $f(t) = \ln^3(3t - 2)$
18. $f(t) = 3^{\tan(t)}$
19. $f(t) = \sqrt[t]{t}$
20. $f(t) = \sqrt[t]{t^3}$
21. $f(t) = t^{\sqrt{t}}$
22. $f(t) = t^{\sin(t)}$
23. $f(t) = \sin^t(t)$
24. $f(t) = (\cos(t))^{\sin(t)}$
25. $f(t) = \arctan^t(t)$
26. $f(t) = \arccos^t(t)$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction f définie par $f(t) = t^n + p\,t + q$. Montrer que f a au plus 2 zéros si n est pair et au plus 3 si n est impair.

Exercice 3. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions f définies par :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
3. $f(x) = \sin^2(x)$
4. $f(x) = \cos^3(x)$
5. $f(x) = \left(x^3 + 2x - 7\right) e^x$
6. $f(x) = \sin^2(x)\,\cos^3(x)$
7. $f(x) = e^x\,\cos(x)$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie par : $f(x) = x^{n-1}\,\ln(x)$.
Montrer que $\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que :
$\exists c \in \mathbb{R}_+^* \,\big|\, f'(c) = 0$

Exercice 6. Soit $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et telle que $f(1) = f(2) = 0$.
Ecrire une CNS pour que la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe de f passe par l'origine.
Montrer qu'il existe une droite passant par l'origine et tangente au graphe de f.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$. Soit $g = f^{(n)}$.
A l'aide de la formule de Leibniz, montrer que : $\forall p \in [\![1, n-1]\!]\,, f^{(p)}(1) = f^{(p)}(-1) = 0$.
En déduire que g possède exactement n racines réelles, appartenant à $[-1, 1]$.

Exercice 8. Soit f une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
$\big(\ f \text{ s'annule } n \text{ fois }\big) \Longrightarrow \big(\ f' \text{ s'annule } n-1 \text{ fois }\big)$

Exercice 9. Montrer que : $e^x = 3 + x$ admet une seule solution positive a. Trouver sa partie entière. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a.
Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que : $\forall n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - a| \leqslant k\ |u_n - a|$. En déduire : $\forall n \geqslant 0$, $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
Trouver n pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-4} près de a.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Montrer qu'il existe un polynome P_n de degré n tel que : $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.

Montrer que, pour $n \geqslant 1$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

☞ $P_{n+1}(t) + (2n+1)\,t\,P_n(t) + n^2\left(1+t^2\right)\,P_{n-1}(t) = 0$
☞ $P_{n+1}(t) = \left(1+t^2\right)\,P_n'(t) - (2n+1)\,t\,P_n(t)$
☞ $\left(1+t^2\right)\,P_n''(t) - (2n-1)\,t\,P_n'(t) + n^2\,P_n(t) = 0$